Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka

Kertaus

sanoma pro

Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

14 ä na tiikka

Kertaus

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-1225-5 Pitkä matematiikka 14 Kertaus

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2383-1
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2384-8

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko, kansi Timo Jokivartio
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen ja Tuomas Könönen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Sisältö

Tämä nide on laadittu oppikirjaksi lukion pitkän matematiikan kertauskurssille ja harjoitus- ja käsikirjaksi itsenäisesti kertaavalle. Kirja kokoaa yhteen pitkän matematiikan pakollisten kurssien sisällöt.

Kirja tukee yksilöllisiin tavoitteisiin ja runsaaseen harjoitteluun perustuvaa kertaamista.

Eteneminen

Pitkän matematiikan sisällöt on ryhmitelty kuuteentoista lukuun, joilla on seuraavankaltainen rakenne.

TEORIAKERTAUS JA HARJOITUKSET
Luvun aihepiiri on jaettu pienempiin kokonaisuuksiin, joissa havainnollistusten ja esimerkkien avulla kerrataan teoriaa ja keskeisiä ongelmatyyppejä. Jokaisen kokonaisuuden päättää muutama harjoitus, jotka on laadittu ylioppilaskokeen alkupään tehtävien mukaisiksi varmentamaan perustaitojen ja -tietojen hallintaa.

TEHTÄVÄT JA RATKAISUOHJEET
Luvun lopussa olevat tehtävät kattavat monipuolisesti luvun aihepiirin. Tehtävät on pyritty järjestämään vaativuustason mukaisesti. Jokaisen tehtävän vastauksen yhteydessä on ratkaisuohjeita, joihin kannattaa perehtyä myös ratkaisun täydellisyyden tarkistamiseksi. Joihinkin tehtäviin on annettu useita vaihtoehtoisia ratkaisutapoja.

Sisällysluettelo ja hakemisto

Kirjan alussa oleva yksityiskohtainen sisällysluettelo ja lopussa oleva hakemisto auttavat kirjan käyttäjää kokonaisuuksien hahmottamisessa ja tiedon etsimisessä.

Muu kertausmateriaali

Kertauskirjassa ei ole mahdollista käydä läpi kaikkia pitkän matematiikan pakollisten kurssien sisältöjä eikä kaikkia tärkeitä ongelmatyyppejä. Kerrattaessa kannattaa palata myös kurssien oppikirjoihin.

Taulukkokirjan käyttöä on harjoiteltava koko kertaamisen ajan.

Järjestelmällisen kertauksen aikana ja kertauksen jälkeen on myös tärkeää laskea ylioppilaskokeita. Tällöin tämä kirja palvelee käsikirjana, josta saa apua ongelmatilanteissa.

Toivotamme tuloksellista kertaamista. Kiitämme Sinua miellyttävästä yhteistyöstä ja toivotamme onnea lukio-opintojen jälkeiseen elämääsi.

Helsingissä 29.10.2007

Tekijät

Sisällys

Luvut ja lukusuora 9
Luvut ja laskutoimitukset 9
Itseisarvo 14

Prosenttilaskenta 20
Prosentti 20
Vertailu ja muutos 22

Potenssit ja juuret 29
Potenssi 29
Juuret 31
Murtopotenssit 34
Neliöjuuri 37
Verrannollisuus 40
Derivaattafunktiot 43

Polynomit, polynomiyhtälöt ja -epäyhtälöt 46
Polynomeilla laskeminen 46
Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö 48
Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö 50
Korkeamman asteen yhtälö ja epäyhtälö 55
Neliöjuuriyhtälö 60
Polynomifunktion derivaatta 62

Rationaalifunktiot 66
Rationaalifunktio 66
Rationaalilausekkeilla laskeminen 68
Rationaaliyhtälö 69
Rationaaliepäyhtälö 71
Rationaalifunktion derivaatta 73

Eksponentti- ja logaritmifunktio 76
Eksponenttifunktio 76
Logaritmifunktio 78
Logaritmikaavat ja logaritmiyhtälöt 81
Eksponenttiyhtälö ja logaritmi 83
Eksponentti- ja logaritmifunktion derivaatta 85

Trigonometriset funktiot 89
Sini, kosini ja tangentti 89
Sinin, kosinin ja tangentin ominaisuuksia 91
Kulman ratkaiseminen 93
Trigonometriset funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ 96
Trigonometrisia yhtälöitä 99
Trigonometristen funktioiden derivaatat. 102

Tasogeometria 104
Kulmalauseita 104
Yhdenmuotoiset kuviot. 106
Pythagoraan lause 110
Kolmiolauseita 114
Suorakulmaisen kolmion trigonometria 116
Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava ja sinilause 118
Kosinilause 122

Avaruusgeometria. 127
Kulma avaruudessa 127
Tilavuuksia ja pinta-aloja 132
Sisäkkäisiä kappaleita 135

Analyyttinen geometria 140
Ympyrän yhtälö 140
Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. 143
Suoran yhtälö 146
Yhtälöryhmä 151
Suorien kohtisuoruus 158
Pisteen etäisyys suorasta. 161
Paraabeli 163

Vektorit 168
Vektori ja vektorien laskutoimitukset. 168
Vektorin kertominen luvulla. 170
Vektorin komponentit 172
Koordinaatiston vektorit 178
Suora ja taso 182
Pistetulo. 189

Funktion jatkuvuus ja funktion derivaatta 194
Jatkuvuus 194
Derivaatta 197
Derivaatta ja funktion kulku 202
Funktion suurin ja pienin arvo 208

Suurin ja pienin arvo – sovelluksia 213

Integraalilaskenta 219
Integraalifunktio 219
Yhdistetyn funktion integroiminen 222
Määrätty integraali 225
Pinta-alan laskeminen 228
Tilavuuden laskeminen 231

Lukujonot ja summat 239
Lukujono 239
Aritmeettinen jono ja summa 242
Geometrinen jono ja summa 244
Rekursiivinen lukujono 248

Todennäköisyyslaskenta 253
Todennäköisyys 253
Diskreetti satunnaismuuttuja 256
Kombinatoriset menetelmät 258
Todennäköisyyksien laskusääntöjä 264
Toistokoe 268
Jatkuva satunnaismuuttuja 270

Tehtävien vastaukset 279

Hakemisto 353

Luvut ja lukusuora

Luvut ja laskutoimitukset

Lukujoukot

Luonnollisia lukuja ovat luvut $0,\ 1,\ 2,\ ...$ eli luvut, joita käytetään lukumäärien ilmaisemiseen. Luonnollisten lukujen joukko merkitään $\mathbb{N}$.

Kokonaislukuja ovat luvut $...\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...$. Kokonaislukujen joukko merkitään $\mathbb{Z}$.

Rationaalilukuja ovat luvut, jotka voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun osamääränä eli murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä osoittaja m ja nimittäjä $n \neq 0$ ovat kokonaislukuja. Rationaalilukujen joukko merkitään $\mathbb{Q}$.

Rationaaliluvun desimaalimuoto on päättyvä tai jaksollinen, ja kääntäen: luku, jonka desimaalimuoto on päättyvä tai jaksollinen, on rationaaliluku.

Esimerkiksi päättyvällä desimaaliluvulla $7{,}23$ on murtolukumuoto

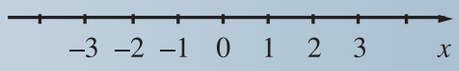
$$7{,}23 = \frac{723}{100}.$$ *

Reaalilukujen joukko muodostuu rationaali- ja *irrationaaliluvuista*. Irrationaaliluvun desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton.

Esimerkiksi luvut $\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$, π, e ja $e + 3$ ovat irrationaalilukuja.

Reaalilukujen joukko merkitään $\mathbb{R}$.

Reaaliluvut muodostavat *lukusuoran*.



---

* Seuraava esimerkki havainnollistaa yhtä menetelmää, jolla voidaan löytää jaksollisen desimaaliluvun murtolukumuoto.

$a = 0{,}3232...$ Luvun a jakson pituus on 2, joten luku kerrotaan 100:lla.

$100a = 32{,}3232...$

$99a = 32$ Kun lasketaan erotus $100a - a$, desimaalit kumoutuvat.

$$a = \frac{32}{99}$$

ESIMERKKI 1

Osoita, että rationaaliluvun ja irrationaaliluvun summa on irrationaaliluku.

Ratkaisu

Olkoon a rationaaliluku ja b irrationaaliluku. Osoitetaan, että $a+b$ on irrationaaliluku.

Koska a on rationaaliluku, niin $a=\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja.

Jos $a+b$ olisi rationaaliluku, niin olisi $a+b=\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja. Tällöin olisi

$$b=\frac{p}{q}-a=\frac{p}{q}-\frac{m}{n}=\frac{pn}{qn}-\frac{qm}{qn}=\frac{pn-qm}{qn}$$

eli b olisi kahden kokonaisluvun osamäärä. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä b on irrationaaliluku. Siis luku $a+b$ on irrationaaliluku. □

Merkinnällä $x \in A$ voidaan ilmaista lyhyesti, että luku x kuuluu joukkoon A.

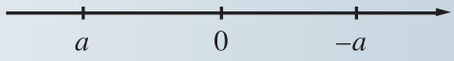
Esimerkiksi merkintä $n \in \mathbb{N}$ tarkoittaa, että n on luonnollinen luku.
Merkintä $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ tarkoittaa, että x kuuluu reaalilukujen joukkoon, josta on poistettu luvut 1 ja 3. Toisin sanoen: x on reaaliluku, jolle pätee $x \neq 1$ ja $x \neq 3$ (eli $x < 1$ tai $1 < x < 3$ tai $x > 3$).
Merkintä $x \in [-2, 4]$ tarkoittaa, että x on reaaliluku, joka on lukusuoran välillä $[-2, 4]$ eli jolle pätee $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

Vastaluku

Jokaisella reaaliluvulla on *vastaluku*. Luvun a vastaluku merkitään $-a$.*
Luvun ja vastaluvun summa on 0:

$$a + (-a) = 0.$$

Luku ja sen vastaluku ovat lukusuoralla yhtä etäällä luvusta 0.



Vastaluvun avulla voidaan vähennyslasku muuttaa yhteenlaskuksi ja yhteenlasku vähennyslaskuksi.

$a - b = a + (-b)$

$a + b = a - (-b)$

Esimerkiksi on $x + 5 = x - (-5)$.

Käänteisluku

Jokaisella nollasta poikkeavalla reaaliluvulla on *käänteisluku*.

Luvun $a\ (\neq 0)$ käänteisluku merkitään $\frac{1}{a}$.

Luvun ja käänteisluvun tulo on 1:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Käänteisluvun avulla voidaan jakolasku muuttaa kertolaskuksi.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = a \cdot \frac{1}{b}$$

Esimerkiksi kolmasosa luvusta a on $\frac{a}{3} = \frac{1}{3}a$.

---

* Vastaluvun ja käänteisluvun määritelmät ja merkinnät ovat taulukkokirjassa.

ESIMERKKI 2

Osoita, että luku $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)$ on luvun $\sqrt{6}-2$ käänteisluku.

Ratkaisu

Tapa 1. Osoitetaan, että lukujen $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)$ ja $\sqrt{6}-2$ tulo on 1.

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2) = \frac{1}{2}((\sqrt{6})^2 - 2^2) \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{1}{2}(6-4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Siis luku $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)$ on luvun $\sqrt{6}-2$ käänteisluku.

Tapa 2. Sievennetään luvun $\sqrt{6}-2$ käänteisluvun $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ lauseketta.

$\sqrt{6}+2$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$$

Lavennetaan erotusta $\sqrt{6}-2$ vastaavalla summalla $\sqrt{6}+2$.

$$= \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{6}+2}{6-4}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)$$

Siis luku $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+2)$ on luvun $\sqrt{6}-2$ käänteisluku.

Murtolukujen laskutoimitukset

Seuraava esimerkki havainnollistaa murtolukujen laskutoimituksia.*

ESIMERKKI 3

Laske $\dfrac{-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}}{2\frac{3}{4}}$.

Ratkaisu

$$\frac{-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}}{2\frac{3}{4}} = (-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}) : 2\frac{3}{4}$$

Sekaluku ilmaistaan murtolukumuodossa.

$$= (-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}) : \frac{11}{4}$$

Yhteenlaskettavat murtoluvut lavennetaan samannimisiksi.

$$= (-\frac{2}{12}+\frac{9}{12}) : \frac{11}{4}$$

$$= \frac{7}{12} : \frac{11}{4}$$

Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$= \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{11}$$

Osoittajaksi tulee osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo.

$$= \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot 11}$$

Supistetaan.

$$= \frac{7}{33}$$

Vastaus $\dfrac{7}{33}$

---

* Jos tehtävän ilmeisenä tarkoituksena on testata murtolukujen laskusääntöjen hallitsemista, ratkaisuun on kirjattava oleelliset laskusääntöihin perustuvat välivaiheet. Lasku kannattaa tarkistaa laskimen murtolukutoiminnoilla. Jos murtolukulasku kohdataan vain muuntyyppisen tehtävän tuloksen loppusievennyksessä (esimerkiksi laskettaessa määrätyn integraalin arvoa), lasku voidaan suorittaa kokonaan laskimen murtolukutoiminnoilla.

Harjoituksia

1. Laske. a) $\dfrac{-1+2\cdot\frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$ b) $1\frac{1}{5} : (3-6:\frac{2}{3})$

2. Laske a) lausekkeen $-x^2+5x$ arvo muuttujan arvolla $\frac{1}{3}$

b) lausekkeen x^2+4x arvo muuttujan arvolla $-\frac{2}{3}$.

3. a) Laske lausekkeen $x-\frac{1}{x}$ arvo, kun $x=1\frac{2}{3}$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}$.

4. Matti söi leivoksesta kuudesosan ja Tiina jäljelle jääneestä osasta neljäsosan. Mikä osa leivoksesta oli nyt jäljellä?

5. Osoita, että luku $\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$ on luvun $3-\sqrt{5}$ käänteisluku.

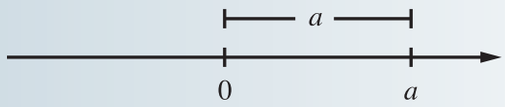
Itseisarvo

Itseisarvon määritelmä

Reaaliluvun *itseisarvo* on luvun etäisyys nollasta. Luvun a itseisarvo merkitään $|a|$.

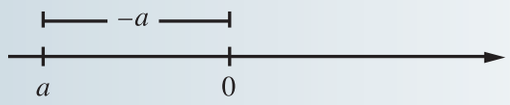
Epänegatiivisen luvun itseisarvo on luku itse.

Jos $a \geqslant 0$, niin $|a| = a$.



Jos luku on negatiivinen tai nolla, niin luvun itseisarvo on yhtä suuri kuin luvun vastaluku.

Jos $a \leqslant 0$, niin $|a| = -a$.



Siis

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0. \end{cases}$$

Esimerkiksi $|2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$, sillä $2-\sqrt{5} \approx -0{,}24 < 0$.

Itseisarvon ominaisuuksia

Kahden luvun itseisarvot ovat yhtä suuret, jos ja vain jos luvut ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut:

$$|a| = |b|, \text{ jos ja vain jos } a = b \text{ tai } a = -b.$$

Lukujen tulon itseisarvo on lukujen itseisarvojen tulo:

$$|ab| = |a||b|.$$

Lukujen osamäärän itseisarvo on lukujen itseisarvojen osamäärä:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Kahden luvun etäisyys lukusuoralla

Lukujen a ja b etäisyys on erotuksen $a - b$ itseisarvo $|a - b|$.

Esimerkiksi luvun x etäisyys luvusta -6 on $|x - (-6)| = |x + 6|$.

ESIMERKKI 4

Ratkaise

a) yhtälö $|3x - 7| = 5$

b) epäyhtälö $|4x + 3| < 5$

c) epäyhtälö $|5x + 1| \geqslant 4$.

Ratkaisu

a) $|3x - 7| = 5$

Luvun itseisarvo on 5, kun luku on 5 tai -5.

$3x - 7 = 5$ tai $3x - 7 = -5$

Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

$3x = 12$ tai $3x = 2$

$x = 4$ tai $x = \frac{2}{3}$

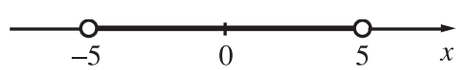
b) $|4x + 3| < 5$

Luvun itseisarvo on pienempi kuin 5, kun luku on välillä $]-5, 5[$.

$-5 < 4x + 3 < 5 \quad | -3$

$-8 < 4x < 2 \quad | : 4 > 0$

$-2 < x < \frac{1}{2}$



Voidaan myös purkaa kaksoisepäyhtälö $-5 < 4x + 3 < 5$ kahdeksi epäyhtälöksi.

$-5 < 4x + 3 < 5$

$4x + 3 > -5$ ja $4x + 3 < 5 \quad | -3$ Ratkaistaan epäyhtälöt.

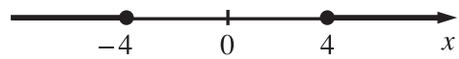
$4x > -8$ ja $4x < 2 \quad | : 4 > 0$

$x > -2$ ja $x < \frac{1}{2}$ Epäyhtälöt voidaan yhdistää kaksoisepäyhtälöksi.

$-2 < x < \frac{1}{2}$

c) $|5x + 1| \geqslant 4$

Luvun itseisarvo on vähintään 4, kun luku on välillä $]-\infty, -4]$ tai välillä $[4, \infty[$.



$5x + 1 \leqslant -4$ tai $5x + 1 \geqslant 4 \quad | -1$ Ratkaistaan epäyhtälöt.

$5x \leqslant -5$ tai $5x \geqslant 3 \quad | : 5 > 0$

$x \leqslant -1$ tai $x \geqslant \frac{3}{5}$ Ratkaisujoukko muodostuu kahdesta erillisestä lukusuoran osasta.

Vastaus a) $x = 4$ tai $x = \frac{2}{3}$ b) $-2 < x < \frac{1}{2}$ c) $x \leqslant -1$ tai $x \geqslant \frac{3}{5}$ *

---

* Tulokset voi tarkistaa graafisella laskimella piirretyistä kuvaajista.
Esimerkiksi c-kohdassa piirretään kuvaajat $y = \text{abs}(5x + 1)$ ja $y = 4$.

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälö $|3x - 5| = |x + 4|$.

Ratkaisu

$|3x - 5| = |x + 4|$ $\qquad$ $|a| = |b|$, jos ja vain jos $a = b$ tai $a = -b$.

$3x - 5 = x + 4$ tai $3x - 5 = -(x + 4)$

$3x - 5 = x + 4$ tai $3x - 5 = -x - 4$

$2x = 9$ tai $4x = 1$

$x = \frac{9}{2}$ tai $x = \frac{1}{4}$

Vastaus $x = \frac{9}{2}$ tai $x = \frac{1}{4}$ *

ESIMERKKI 6

Ratkaise yhtälö $|x + 3| = 1 - 2x$.

Ratkaisu

Ilmaistaan lauseke $|x + 3|$ ilman itseisarvomerkkejä ja ratkaistaan näin saadut lukusuoran eri osaväleillä määritellyt yhtälöt.

Luvun $x + 3$ itseisarvo on luku $x + 3$ itse, kun $x + 3$ on epänegatiivinen.

$x + 3 \geqslant 0$

$x \geqslant -3$

Siis $|x + 3| = x + 3$, kun $x \geqslant -3$.

Kun $x < -3$, luku $x + 3$ on negatiivinen ja $|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3$.

---

* Toinen tapa ratkaista yhtälö on korottaa molemmat puolet neliöön. Koska yhtälön $|3x - 5| = |x + 4|$ molemmat puolet ovat epänegatiiviset, yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(3x - 5)^2 = (x + 4)^2$ kanssa. Juuret $\frac{9}{2}$ ja $\frac{1}{4}$ saadaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälö.

Siis

$$|x+3| = \begin{cases} -x-3, \text{ kun } x < -3 \\ x+3, \text{ kun } x \geqslant -3. \end{cases}$$

Välillä $]-\infty, -3[$ yhtälö $|x+3| = 1-2x$ on

$-x-3 = 1-2x$

$x = 4.$

Luku 4 ei toteuta ehtoa $x < -3$. Yhtälöllä ei ole juurta välillä $]-\infty, -3[$.

Välillä $[-3, \infty[$ yhtälö $|x+3| = 1-2x$ on

$x+3 = 1-2x$

$3x = -2 \qquad | : 3$

$x = -\frac{2}{3}.$

Luku $-\frac{2}{3}$ toteuttaa ehdon $x \geqslant -3$. Yhtälöllä on välillä $[-3, \infty[$ juuri $-\frac{2}{3}$.

Vastaus $-\frac{2}{3}$

Harjoituksia

6. Ratkaise a) yhtälö $|x+3| = 5$ b) epäyhtälö $|x+3| > 5$.

7. Ratkaise epäyhtälö $|2x-1| \leqslant 5$.

8. Ratkaise yhtälö $|2x-1| = |3x+2|$. (Ylioppilaskoe, k. 1994)

9. Ratkaise yhtälö $|x| = 2x+3$.

10. Millä muuttujan x arvoilla on
a) $|x-3| = x-3$ b) $|x-3| = -x+3$?
Piirrä funktion $f(x) = |x-3|$ kuvaaja.

TEHTÄVIÄ

11. Millä x:n arvolla luku $4x - 3$ on luvun $x - 2$ a) vastaluku b) käänteisluku?

12. Osoita, että lausekkeiden $x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}$ ja $x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}$ arvot ovat toistensa käänteislukuja kaikilla x:n arvoilla. (Ylioppilaskoe, k. 1988)

13. Ratkaise
a) yhtälö $|2x + 5| = 3$
b) epäyhtälö $|2x - 6| \leqslant 4$
c) epäyhtälö $|3x + 5| > 4$.

14. Ilmaise lausekkeena luvun x etäisyys luvuista 3 ja -5. Määritä edelleen kaikki luvut, joiden etäisyys luvusta 3 on neljä kertaa niin suuri kuin luvusta -5.

15. Ratkaise yhtälö $|3x + 1| - |x - 4| = 0$.

16. Ratkaise yhtälö $|x^2 - 3x - 8| = |3x - 8|$.

17. Ratkaise yhtälö $|2x - 6| = 3x - 1$.

18. Millä vakion a arvoilla epäyhtälön $|3x - a| < 4$ ratkaisujoukko sisältää luvun 1?

19. Määritä kaikki luonnolliset luvut m ja n, jotka toteuttavat yhtälön $m^2 - n^2 = 707$.

20. Näytä, että jokaisella $k = 1, 2, 3, \ldots$ luku $k^3 + k$ on parillinen. (Ylioppilaskoe, k. 1995)

21. Osoita, että irrationaaliluvun ja nollasta eroavan rationaaliluvun tulo on irrationaaliluku. Voiko kahden eri suuren irrationaaliluvun tulo olla rationaaliluku?

22. Oletetaan, että luku a on irrationaaliluku. Osoita, että myös luku $\dfrac{3a - 1}{a + 2}$ on irrationaaliluku.

23. Reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ määritellään yhteenlaskua muistuttava laskutoimitus $x \circ y$ seuraavasti: $x \circ y = x + y - 2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että laskutoimitus toteuttaa seuraavat ehdot:
1° $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2° $x \circ y = y \circ x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.
3° On olemassa sellainen luku $\omega \in \mathbb{R}$, että $x \circ \omega = \omega \circ x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Mikä ω on?
4° Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vasta-alkio x^*, jolle $x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$. (Ylioppilaskoe, s. 1997)

24. Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole vakiofunktio, on ominaisuus: $f(a + b) = f(a)f(b)$ kaikilla a ja b.
a) Määritä $f(0)$.
b) Osoita, että $f(x) \neq 0$ kaikilla x.
c) Osoita, että jos $f(x) \neq f(0)$ kaikilla $x \neq 0$, niin funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}.
Osoita edelleen, että jos luvut a ja b kuuluvat käänteisfunktion määrittelyjoukkoon, niin myös luku ab kuluu ja $f^{-1}(ab) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.

Prosenttilaskenta

Prosentti

Prosentti on sadasosa.

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Perustilanteet

Kun lasketaan, *kuinka monta prosenttia a on b:stä*, suhde $\frac{a}{b}$ muutetaan prosenteiksi. Prosenttien (sadasosien) määrä näkyy yleensä helpoimmin suhteen desimaalimuodosta.

Vuoden 2006 lopussa Suomessa oli 5 255 580 asukasta, joista 113 852 oli ulkomaiden kansalaisia. Ulkomaiden kansalaisten osuus Suomen väestöstä oli

$$\frac{113\,852}{5\,255\,580} \approx 0{,}022 = 2{,}2\,\%.$$

Kun lasketaan, *kuinka paljon on p prosenttia a:sta*, niin p prosenttia ilmaistaan desimaalilukuna, jolla kerrotaan luku a.

Eräässä kunnassa kunnallisvero on 19,5 % verotettavista vuosituloista. Veron määrä lasketaan kertomalla vuositulot luvulla 0,195. Jos vuositulot ovat 37 530,80 euroa, niin kunnallisveron suuruus on

$0{,}195 \cdot 37\,530{,}80\,€ \approx 7\,318{,}51\,€.$

ESIMERKKI 1

Juomasekoitus tehdään sekoittamalla kolme osaa mietoa juomaa, jonka alkoholipitoisuus on 12 %, ja kaksi osaa väkevää juomaa, jonka alkoholipitoisuus on 43 %. Mikä sekoituksen alkoholipitoisuus on?

Ratkaisu

Yhden sekoitusosan suuruutta merkitään a.

Lasketaan sekoituksen määrä:
Miedon juoman määrä sekoituksessa on $3a$ ja väkevän juoman $2a$.
Sekoituksen määrä on $2a + 3a = 5a$.

Lasketaan sekoituksessa olevan alkoholin määrä:
Alkoholin määrä miedossa juomassa on $0{,}12 \cdot 3a = 0{,}36a$ ja väkevässä juomassa $0{,}43 \cdot 2a = 0{,}86a$.

Alkoholin määrä on $0{,}36a + 0{,}86a = 1{,}22a$.

Seoksen alkoholipitoisuus on

$$\frac{1{,}22\overset{1}{\cancel{a}}}{5\underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{1{,}22}{5} \approx 0{,}24 = 24\ \%.$$

Vastaus

24 %

Perusarvon ratkaiseminen

Tuntematon perusarvo ratkaistaan yhtälön avulla.

Mehuvalmisteen sokeripitoisuus on 14 %. Lasketaan, kuinka suureen mehuerään riittää 320 kg:n erä sokeria. Jos mehun määrä on x, niin

$$0{,}14x = 320$$

$$x = \frac{320}{0{,}14} \approx 2\,286.$$

Sokeria riittää noin 2 300 kg:n mehuerään.

Harjoituksia

25. Henkilöllä oli pankissa talletettuna 4 781,30 euroa tilille, jonka korko on 1,50 %, ja 12 312,00 euroa toiselle kiinteäkorkoiselle tilille. Talletuksista hän sai yhteensä korkoa 348,74 euroa. Mikä toisen tilin korkoprosentti on?

26. Laboratoriossa tarvitaan 750 grammaa 2-prosenttista suolaliuosta. Saatavilla on vain 5-prosenttista suolaliuosta ja vettä. Kuinka paljon näitä on sekoitettava halutun liuoksen valmistamiseksi? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

27. Sekoitetaan neljä osaa 6,0-prosenttista suolaliuosta ja kolme osaa 12-prosenttista liuosta. Mikä sekoituksen suolapitoisuus on?

28. Tuoreen koivun painosta 45 % on vettä. Erä koivuhaketta painoi tuoreena 1 300 kg ja kuivattuna 820 kg. Mikä kuivatun hakkeen vesipitoisuus oli?

29. Hannan nettopalkka 26 prosentin veronpidätyksen jälkeen oli 1 697,20 euroa. Kuinka suuri Hannan bruttopalkka oli?

Vertailu ja muutos

Vertailuprosentti

Kun lasketaan, ”*kuinka monta prosenttia a on b:tä suurempi*” tai ”*a on b:tä pienempi*”, niin prosentit lasketaan arvosta b (arvosta, johon verrataan).

Vastaavasti, kun muutos ilmaistaan prosentteina, niin prosentit lasketaan muuttumista edeltävästä arvosta.

Eräässä ammattiryhmässä naisten keskipalkka on 2 899 euroa ja miesten 3 168 euroa. Lasketaan, kuinka monta prosenttia naisten palkkaa suurempi miesten palkka on.

Koska $\frac{3\,168}{2\,899} \approx 1{,}093 = 109{,}3\ \%$, niin miesten palkka on

$109{,}3\ \% - 100\ \% = 9{,}3\ \%$ naisten palkkaa suurempi.*

---

* Voidaan myös laskea ensin palkkojen erotus $3\,168\ € - 2\,899\ € = 269\ €$.

Miesten palkka on $\frac{269}{2\,899} \approx 0{,}093 = 9{,}3\ \%$ naisten palkkaa suurempi.

Tuotetta myytiin kaupoissa A ja B samalla hinnalla a. Kauppa A alensi hintaa 30 % ja kauppa B 40 %. Lasketaan, kuinka monta prosenttia kaupan B hinta on nyt kaupan A hintaa halvempi.

Alennetun hinnat ovat $0{,}7a$ ja $0{,}6a$. Koska $\frac{0{,}6\cancel{a}^{\,1}}{0{,}7\cancel{a}_{\,1}} = \frac{0{,}6}{0{,}7} \approx 0{,}86 = 86\ \%$,

kaupan B hinta on $100\ \% - 86\ \% = 14\ \%$ kaupan A hintaa halvempi.*

ESIMERKKI 2

Neliöllä ja ympyrällä on sama pinta-ala. Kuinka monta prosenttia neliön piiri on ympyrän kehän pituutta suurempi? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu

Merkitään neliön ja ympyrän pinta-alaa A. Ilmaistaan neliön ja ympyrän piiri A:n lausekkeena.

Olkoon a neliön sivu. Tällöin

$a^2 = A$

$a = \sqrt{A}$ (tai $a = -\sqrt{A}$).

Neliön piiri $p_N = 4a = 4\sqrt{A}$.

Olkoon r ympyrän säde. Tällöin

$\pi r^2 = A$

$r^2 = \frac{A}{\pi}$

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ (tai $r = -\sqrt{\frac{A}{\pi}}$).

Ympyrän kehän pituus

$p_Y = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\pi\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}\,\sqrt{A}$.

---

* Voidaan myös ensin laskea hintojen erotus $0{,}7a - 0{,}6a = 0{,}1a$.

Kaupan B hinta on $\frac{0{,}1a}{0{,}7a} \approx 0{,}14 = 14\ \%$ kaupan A hintaa halvempi.

Lasketaan neliön piirin suhde ympyrän kehän pituuteen ja muutetaan suhde prosenteiksi.

$$\frac{p_N}{p_Y} = \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{A}}{\cancel{2}^{1}\sqrt{\pi}\sqrt{A}} \qquad \text{Jakajana on luku, johon verrataan.}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}128 = 112{,}8\ \% \qquad \text{Lasketaan suhteen likiarvo vaaditulla tarkkuudella.}$$

Neliön piiri on $112{,}8\ \% - 100\ \% = 12{,}8\ \%$ ympyrän kehän pituutta suurempi.

Vastaus 12,8 %

ESIMERKKI 3

Tuotteen H myynti oli eräänä vuonna $5{,}7\ \%$ markkinajohtajan K myyntiä pienempi. Seuraavana vuonna K:n myynti kasvoi $14{,}5\ \%$, mutta jäi nyt vuorostaan $3{,}2\ \%$ H:n myyntiä pienemmäksi. Kuinka monta prosenttia H:n myynti kasvoi?

Ratkaisu Olkoon a tuotteen K myynnin suuruus ensimmäisenä vuotena.

Tuotteen H myynti ensimmäisenä vuotena oli $0{,}943a$.

Tuotteen K myynti toisena vuotena oli $1{,}145a$.

Olkoon x tuotteen H myynti toisena vuotena. Ratkaistaan x.

$0{,}968x = 1{,}145a \qquad | : 0{,}968$ Tuotteen K myynti $1{,}145a$ on $100\ \% - 3{,}2\ \% = 96{,}8\ \%$ tuotteen H myynnistä.

$$x = \frac{1{,}145a}{0{,}968} \approx 1{,}18285a$$

Koska $\frac{1{,}18285a}{0{,}943a} \approx 1{,}254 = 125{,}4\ \%$, tuotteen H myynti oli noussut $25{,}4\ \%$.

Vastaus 25,4 %

ESIMERKKI 4

Sellun tonnimääräinen vienti kasvoi edellisestä vuodesta 18,2 %, mutta sellutonnin hinta aleni niin, että viennin arvo pysyi samana. Kuinka monta prosenttia hinta aleni?

Ratkaisu

Olkoon a vietyjen tonnien määrä ja b sellutonnin hinta edellisenä vuotena.

Viennin arvo edellisenä vuotena oli tulo ab.

Vienti a kasvoi 18,2 %, joten vienti jälkimmäisenä vuotena on $1{,}182a$.

Merkitään hintaa jälkimmäisenä vuotena x.

Viennin arvo jälkimmäisenä vuotena on $1{,}182a \cdot x = 1{,}182ax$.

Koska viennin arvo pysyi samana, niin

$$1{,}182ax = ab \qquad \big| : 1{,}182a$$

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{a}}b}{1{,}182\underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{b}{1{,}182} = \frac{1}{1{,}182}\,b \approx 0{,}846b.$$

Hinta on tullut 0,846-kertaiseksi eli laskenut 100 % – 84,6 % = 15,4 %.

Vastaus 15,4 %

Prosenttiyksikkö

Kun vertaillaan prosentteina ilmaistuja suhteellisia osuuksia, niin prosenttilukujen erotuksen yksikkö on *prosenttiyksikkö*.

Kun asuntolainan korko nousi 3,17 %:sta 4,48 %:iin, niin lainan korko nousi 4,48 – 3,17 = 1,31 prosenttiyksikköä.

Harjoituksia

30. Eeron palkkio 140 euroa oli 15 euroa Leenan palkkiota suurempi. Kuinka monta prosenttia Leenan palkkiota suurempi Eeron palkkio oli?

31. Joulusesongin ajaksi tuotteen hintaa nostettiin 18 %. Joulun jälkeisessä alennusmyynnissä tuotetta myydään 30 %:n alennuksella. Kuinka monta prosenttia alennusmyyntihinta on joulusesonkia edeltävää hintaa suurempi tai pienempi?

32. Kun torikauppias alensi mansikoiden kilohintaa 30 %, myynti lisääntyi 60 %. Kuinka myynnistä saadut tulot muuttuivat?

33. Hannu ja Maria jakoivat 565 euron palkkion niin, että Maria sai 15 % enemmän kuin Hannu. Kuinka paljon kumpikin sai?

34. Rautatien peruskorjauksen jälkeen kaupunkien välimatka lyheni 5 % ja junan keskinopeutta pystyttiin nostamaan 15 %. Kuinka monta prosenttia matka-aika lyheni?

35. Junalipun hintaan sisältyy arvonlisävero, joka on 6 % verottomasta hinnasta. Kuinka suuri arvonlisävero sisältyy 47,30 euron hintaiseen junalippuun?

36. Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus? (Ylioppilaskoe, s. 1995)

37. Eilan ennakonpidätysprosentti tammikuussa oli 31. Uudessa, helmikuun alussa voimaan tulevassa verokortissa ennakonpidätys on kaksi prosenttiyksikköä pienempi. Helmikuun bruttopalkka on yhtä suuri kuin tammikuun bruttopalkka. Kuinka monta prosenttia helmikuun nettopalkka on tammikuun nettopalkkaa suurempi?

TEHTÄVIÄ

38. Seuramatkan hinnasta lennon osuus on 50 %. Lennon hinnasta 30 % on polttoainekustannuksia. Polttoaine kallistuu 10 %. Kuinka monen prosentin nousun tämä aiheuttaa matkan kokonaishintaan? (Ylioppilaskoe, k. 1991)

39. Perheen asuntolainan hoitokulut olivat 32 % tuloista. Hoitokulut nousivat 15 %. Kuinka monta prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen?

40. Yrityksen yksikön liikevoitto jäi tilikautena 18 % keskusjohdon asettamaa tavoitetta pienemmäksi. Kuinka monta prosenttia liikevoiton tulisi nousta, jotta seuraavana tilikautena voitto olisi 8 % suurempi kuin johdon asettama uusi tavoite, joka on 5 % edellistä tavoitetta suurempi?

41. Kun tavaran hintaa alennettiin 20 %, sen markkamääräinen myynti kasvoi 2,0 %. Kuinka monella prosentilla kasvoi myyty tavaramäärä? (Ylioppilaskoe, s. 1991)

42. Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

43. Puutarhuri tarvitsee tuholaisten torjuntaan 1,5-prosenttista mäntysaippualiuosta. Hänellä on käytettävissään liuos, jossa on 20 % saippuaa ja loput vettä. Tästä saadaan sopiva torjuntaliuos vettä lisäämällä. Kuinka monta prosenttia liuoksen vesimäärä tällöin kasvaa? (Ylioppilaskoe, k. 1998)

44. Missä suhteessa on sekoitettava 6,0-prosenttista ja 13,0-prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin liuosta, jonka suolapitoisuus on 10,0 %?

45. Vuonna 1996 erään yrityksen tutkimus- ja tuotekehitysmenot olivat 12,0 % liikevaihdosta. Seuraavana vuonna niiden osuus liikevaihdosta oli laskenut kahdella prosenttiyksiköllä. Kuitenkin tutkimus- ja tuotekehitysmenojen markkamäärä oli vuonna 1997 noussut 14 % vuoden 1996 määrään verrattuna. Kuinka monta prosenttia yrityksen liikevaihto vuonna 1997 kasvoi edelliseen vuoteen verrattuna? (Ylioppilaskoe, k. 1999)

46. Laitteen hinta kodinkoneliikkeessä muodostuu liikkeen maksamasta tukkuhinnasta, siihen lisätystä kaupan myyntikatteesta ja näin saatuun verottomaan hintaan lisätystä 22 %:n arvonlisäverosta. Kuinka monta prosenttia tukkuhintaa suuremmaksi liike asettaa taulutelevision hinnan, jotta se voisi myydä televisiota tarjoushinnalla 20 %:n alennuksella ja saada silti myyntikatteen, joka on 30 % tukkuhinnasta? Kuinka monta prosenttia myyntikate on tukkuhinnasta, kun kauppa myy televisiota alentamattomalla hinnalla?

47. Puoliympyrällä ja neliöllä on sama piiri. Kumman pinta-ala on suurempi ja kuinka monta prosenttia suurempi?

48. Teollisuustuotannon osuus kansantuotteesta on 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia teollisuustuotannon tulisi kasvaa, jotta sen osuus kansantuotteesta nousisi 30 prosenttiin, jos muilla osa-alueilla ei tapahdu muutoksia? (Ylioppilaskoe, k. 1994)

49. Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille. (Ylioppilaskoe, k. 2002)

50. Tuoteselosteen mukaan juustossa on rasvaa 28 % painosta ja 45 % kuiva-aineesta. Kuinka monta prosenttia juuston painosta on vettä?

51. Rusinoita saadaan viinirypäleitä kuivattamalla. Kuinka monta prosenttia rypäleiden vedestä haihtuu kuivatuksessa, kun rypäleiden vesipitoisuus on 82 painoprosenttia ja rusinoiden 24 painoprosenttia? (Ylioppilaskoe, k. 1997)

52. Lentokone, jonka nopeus tyynessä säässä on v km/h, lentää matkan A:sta B:hen ja takaisin. Matkan aikana puhaltaa tuuli, jonka suunta on A:sta B:hen ja nopeus c km/h. Tällöin matkaan kuluu 20 % enemmän aikaa kuin tyynessä säässä. Laske suhde c/v. (Ylioppilaskoe, s. 1996)

53. Tavaran hintaa alennettiin ensin p % ja näin saatua hintaa vielä q %. Kuinka monta prosenttia oli kokonaisalennus? Mitä vaikuttaa kokonaisalennukseen, jos p ja q vaihdetaan? (Ylioppilaskoe, s. 1996)

Potenssit ja juuret

Potenssi

Eksponentti kokonaisluku

Potenssi, jonka eksponentti on positiivinen kokonaisluku, on tulo:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}.$$

Kun eksponentti on 0, potenssin arvo on 1:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Potenssi a^{-n} on potenssin a^n käänteisluku,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0),$$

tai toisin tulkittuna käänteisluvun $\frac{1}{a}$ n. potenssi:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad (a \neq 0).$$

Erityisesti a^{-1} on luvun a käänteisluku:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

Esimerkiksi on $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ ja $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$.

Potenssikaavat

Potenssilausekkeita sievennettäessä voidaan käyttää potenssikaavoja.

Samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

$a^m a^n = a^{m+n}$	Eksponentiksi tulee eksponenttien summa.
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Eksponentiksi tulee eksponenttien erotus

Tulon ja osamäärän potenssi

$(ab)^n = a^n b^n$	Tulon potenssi on tekijöiden potenssien tulo.
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Osamäärän potenssi on jaettavan ja jakajan potenssien osamäärä.

Potenssin potenssi

$(a^m)^n = a^{mn}$	Eksponentiksi tulee eksponenttien tulo.

ESIMERKKI 1

Laske kolmen numeron tarkkuudella $(7{,}6 \cdot 10^{47})^{23}$.

Ratkaisu

$(7{,}6 \cdot 10^{47})^{23}$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$= 7{,}6^{23} \cdot (10^{47})^{23}$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$

$\approx 1{,}81 \cdot 10^{20} \cdot 10^{47 \cdot 23} = 1{,}81 \cdot 10^{20} \cdot 10^{1081}$ $\qquad a^m a^n = a^{m+n}$

$= 1{,}81 \cdot 10^{20+1081} = 1{,}81 \cdot 10^{1101}$

Vastaus $1{,}81 \cdot 10^{1101}$

Harjoituksia

54. Pallon seuraava pomppu on aina 20 % matalampi kuin edellinen pomppu. Kuinka korkea 2,5 metrin korkeudelta pudotetun pallon kymmenes pomppu on?

55. Laske lausekkeen $-x^{-2} - 3x^{-1}$ arvo, kun a) $x = 7$ b) $x = -1\frac{1}{5}$.

56. Sievennä lauseke. a) $\dfrac{6a^5}{(-6a^2)^3}$ b) $\dfrac{x^n x^n}{x^n + x^n}$ c) $(x^{n-2})^{n-2} \cdot (x^n)^{4-n}$

57. Sievennä lauseke. a) $\dfrac{2^{x-1} \cdot 8^{x+1}}{4^{2x+4}}$ b) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 5 \cdot 3^n$

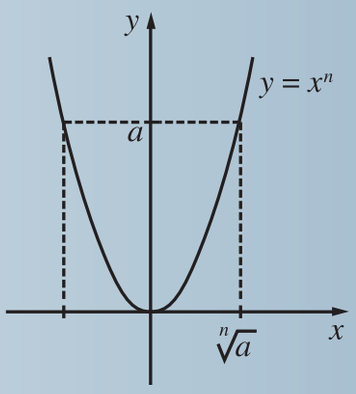
58. Laske kolmen numeron tarkkuudella.

a) $(8{,}91 \cdot 10^{68})^{20}$ b) $\dfrac{(7{,}36 \cdot 10^{55})^{24}}{(9{,}12 \cdot 10^{90})^{15}}$

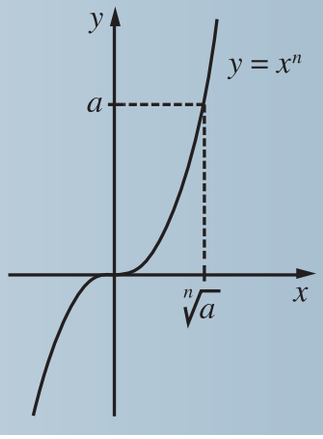
Juuret

Potenssifunktio

Kun eksponentti n on parillinen positiivinen kokonaisluku, niin potenssifunktion x^n arvojoukko on $[0, \infty[$. Funktio x^n saa jokaisen positiivisen arvonsa kahdessa eri kohdassa.



Kun eksponentti n on pariton, niin potenssifunktion x^n arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Funktio x^n saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.



Juuri $\sqrt[n]{a}$ ja potenssiyhtälö $x^n = a$

Potenssifunktioiden x^n ominaisuuksista johtuen luvun a n. juuren määritelmä riippuu siitä, onko eksponentti n parillinen vai pariton.

n parillinen

Luvun a *n. juuri* $\sqrt[n]{a}$ on yhtälön $x^n = a$ epänegatiivinen juuri.

Luvun a n. juuri $\sqrt[n]{a}$ on määritelty, kun $a \geqslant 0$.

Kun $a \geqslant 0$, niin

$$x^n = a, \text{ kun } x = \sqrt[n]{a} \text{ tai } x = -\sqrt[n]{a}.$$

Kun $a < 0$, yhtälöllä $x^n = a$ ei ole ratkaisua.

Esimerkiksi yhtälö $x^4 = 2$ toteutuu, kun $x = \sqrt[4]{2}$ tai $x = -\sqrt[4]{2}$.
Yhtälöllä $x^4 = -3$ ei ole juuria.

n pariton

Luvun a n. juuri $\sqrt[n]{a}$ on yhtälön $x^n = a$ juuri.

Luvun a n. juuri $\sqrt[n]{a}$ on määritelty kaikilla a:n arvoilla.

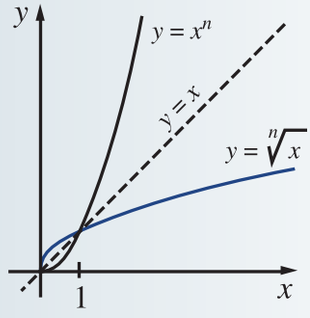
Kaikilla a on

$$x^n = a, \text{ kun } x = \sqrt[n]{a}.$$

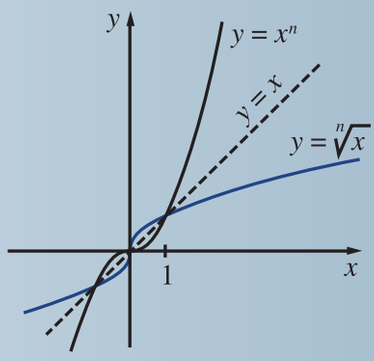
Esimerkiksi yhtälö $x^5 = 2$ toteutuu, kun $x = \sqrt[5]{2}$.
Yhtälö $x^5 = -3$ toteutuu, kun $x = \sqrt[5]{-3} = -\sqrt[5]{3}$.

Juurifunktio $\sqrt[n]{x}$

Kun n on parillinen, funktion $\sqrt[n]{x}$ määrittelyjoukko on $[0, \infty[$. Funktio on välille $[0, \infty[$ rajatun funktion x^n käänteisfunktio, joten funktion $\sqrt[n]{x}$ kuvaaja on käyrän $y = x^n$ koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä olevan haaran peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



Kun n on pariton, funktion $\sqrt[n]{x}$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Funktio on funktion x^n käänteisfunktio, joten funktion $\sqrt[n]{x}$ kuvaaja on käyrän $y = x^n$ peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



ESIMERKKI 2

Kuinka suuri tilin vuotuisen koron tulee olla, jotta talletuksen arvo kymmenessä vuodessa kasvaisi 50 %?

Ratkaisu

Olkoon talletuksen arvo alussa a.

Kun korkoprosentti pysyy samana, talletuksen arvo tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Kymmenessä vuodessa arvo tulee k^{10}-kertaiseksi.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$k^{10}a = 1{,}5a \qquad | : a$ $\qquad a$ jaetaan heti pois.

$k^{10} = 1{,}5$

$k = \sqrt[10]{1{,}5} \approx 1{,}0414$ tai $k = -\sqrt[10]{1{,}5} \approx -1{,}0414$

Vain positiivinen juuri voi olla korkokerroin. Talletuksen arvon tulee joka vuosi tulla 1,0414-kertaiseksi eli kasvaa 4,14 %.

Vastaus

4,14 %

Harjoituksia

59. Mikä funktion a) $\sqrt[4]{3-x}$ b) $\sqrt[3]{3-x}$ määrittelyjoukko on?

60. Ratkaise yhtälö (tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo).
a) $x^6 = 20$ b) $x^5 = 30$

61. Ratkaise yhtälö.
a) $81x^4 - 16 = 0$ b) $5x^3 - 1 = 0$

62. Ratkaise epäyhtälö.
a) $x^4 < 2401$ b) $x^5 < 7776$

63. Budjettia pitää leikata 25 % kuuden vuoden aikana. Kuinka paljon sitä pitää leikata vuosittain kuutena vuotena, kun prosentuaalinen leikkaus halutaan tehdä samansuuruisena joka vuosi? (Ylioppilaskoe, s. 1995)

64. Kuinka monta prosenttia kuution särmä kasvaa, jos kuution tilavuus kasvaa 33,1 %? (Ylioppilaskoe, s. 1988)

Murtopotenssit

Murtopotenssi

Juuret voidaan ilmaista myös käyttäen murtopotenssimerkintää $a^{\frac{m}{n}}$. Tällöin oletetaan, että $a > 0$.*

Potenssi $a^{\frac{1}{n}}$, missä n on positiivinen kokonaisluku, on luvun a n. juuri.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$$

* Tästä tehdään poikkeus, kun kaikkialla määriteltyjä parittomia juurifunktioita derivoidaan saattamalla ne ensin muotoon $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Potenssi $a^{\frac{m}{n}}$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, on luvun a m. potenssin n. juuri,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0),$$

tai yhtäpitävästi n. juuren m. potenssi

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a > 0).$$

Potenssi a^{-r}, missä r on rationaaliluku, on potenssin a^r käänteisluku.

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \qquad (a > 0)$$

Esimerkiksi $a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{a})^2}$.

Murtopotensseille pätevät kaikki sivun 30 potenssikaavat.

Esimerkiksi $\dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{1}{a^1 a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{a^{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{2}}$.

Murtopotenssit tarjoavat mekaanisen tavan muokata juurilausekkeita. Juuret ilmaistaan potensseina ja käytetään potenssikaavoja.

Esimerkiksi $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{(2^2)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Yleinen potenssiyhtälö

Koska $(a^{\frac{1}{r}})^r = a^{\frac{1}{r} \cdot r} = a^1 = a$, niin kaikki potenssiyhtälöt $x^r = a$, missä $a > 0$, voidaan ratkaista murtopotenssin avulla.

> Yhtälön $x^r = a$ positiivinen juuri on $x = a^{\frac{1}{r}}$.

Esimerkiksi yhtälö $x^{2,76} = 4{,}61$ on määritelty, kun $x > 0$.

Yhtälö toteutuu, kun $x = 4{,}61^{\frac{1}{2,76}} \approx 1{,}74$.

Harjoituksia

65. Ilmaise luvun $a\ (> 0)$ potenssina. a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ c) $a^2\sqrt{a}$

66. Sievennä. a) $\sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$ c) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}$

67. Sievennä lauseke. a) $\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{\sqrt{a}}}$ $(a > 0)$

68. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.
a) $x^{0,537} = 2{,}17$ b) $x^{-4,18} = 3{,}85$

Neliöjuuri

Tärkein parillinen juuri on luvun neliöjuuri $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

Neliöjuuren määritelmä

Luku b on luvun a *neliöjuuri* eli $b = \sqrt{a}$, jos ja vain jos b toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

1° $b \geqslant 0$ b on epänegatiivinen.

2° $b^2 = a$. b:n neliö on a.

ESIMERKKI 3

Osoita, että $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

Ratkaisu

On osoitettava, että luku $\sqrt{3} - 1$ on luvun $4 - 2\sqrt{3}$ neliöjuuri.
Luvun $\sqrt{3} - 1$ on oltava epänegatiivinen, ja luvun $\sqrt{3} - 1$ neliön tulee olla $4 - 2\sqrt{3}$.

1° $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7 > 0$. Siis luku $\sqrt{3} - 1$ on epänegatiivinen.

2° $(\sqrt{3} - 1)^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2$

$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$

Siis $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

Kohtien 1° ja 2° nojalla luku $\sqrt{3} - 1$ on luvun $4 - 2\sqrt{3}$ neliöjuuri. □

Juurikaavat

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$$

Tulon neliöjuuri on neliöjuurten tulo.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

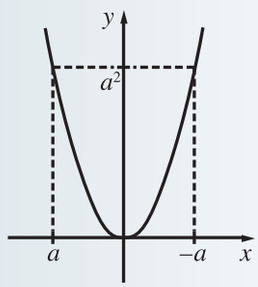
Osamäärän neliöjuuri on neliöjuurten osamäärä.*

Esimerkiksi $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} - \sqrt{9}\,\sqrt{2}$
$= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

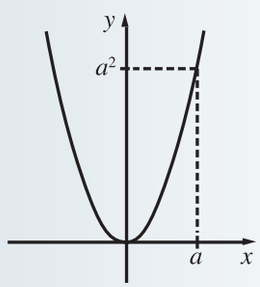
Neliön neliöjuuri

Luvun a^2 neliöjuuri $\sqrt{a^2}$ on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a^2.

Jos luku a on negatiivinen, niin $\sqrt{a^2}$ on luvun a vastaluku $-a$, sillä $-a > 0$ ja $(-a)^2 = a^2$.



Jos luku a on epänegatiivinen, niin $\sqrt{a^2}$ on luku a itse.



Siis

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} -a, \text{ kun } a < 0 \\ a, \text{ kun } a \geqslant 0 \end{cases}$$

eli

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Esimerkiksi on $\sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{x^2(1 - x^2)} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{1 - x^2} = |x|\sqrt{1 - x^2}$.

---

* Vastaavat juurikaavat pätevät myös muille juurille:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ ja $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

ESIMERKKI 4

Sievennä lauseke $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$, kun $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Ratkaisu

Koska aina on $\sqrt{a^2} = |a|$, niin

$$\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+3| + |x-1|.$$

Koska $x \geqslant -3$, niin $x + 3 \geqslant 0$, joten $|x+3| = x + 3$.

Koska $x \leqslant 1$, niin $x - 1 \leqslant 0$, joten $|x-1| = -(x-1) = -x + 1$.

Siis

$$\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = x + 3 + (-x + 1) = 4.$$

Vastaus 4

Harjoituksia

69. Sievennä. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{98}}$ b) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$ c) $\sqrt{45 + 80}$

70. Osoita likiarvoja käyttämättä, että $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{32} - \sqrt{2}$.

71. Laske polynomin $x^3 - 3x^2 - 4x + 90$ tarkka arvo, kun $x = 2\sqrt{5}$.

72. Sievennä lauseke $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-4)^2}$, kun
a) $-1 \leqslant x \leqslant 4$ b) $x \leqslant -1$.

73. Laske kolmen numeron tarkkuudella.
a) $\sqrt{7{,}15 \cdot 10^{1998}}$ b) $\sqrt{9{,}00 \cdot 10^{2001}}$

Verrannollisuus

Suoraan verrannollisuus

Suureet ovat *suoraan verrannolliset*, jos ne muuttuvat samassa suhteessa.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

suure A	suure B
a_1	b_1
a_2	b_2

Jos y on suoraan verrannollinen x:ään, niin y:n riippuvuus x:stä on muotoa

$$y = kx,$$

missä k on vakio eli niin sanottu *verrannollisuuskerroin*.

Kun keliolot ovat samanlaiset, niin auton jarrutusmatka s on suoraan verrannollinen nopeuden v neliöön v^2. Siis $s = kv^2$, missä k on verrannollisuuskerroin.

Kääntäen verrannollisuus

Suureet ovat *kääntäen verrannolliset*, jos ne muuttuvat käänteisessä suhteessa.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

suure A	suure B
a_1	b_1
a_2	b_2

Jos y on kääntäen verrannollinen x:ään, niin y:n riippuvuus x:stä on muotoa

$$y = \frac{k}{x},$$

missä k on verrannollisuuskerroin.

Painovoima F on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden d neliöön d^2. Siis $F = \frac{k}{d^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin.

ESIMERKKI 5

Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön. Valaistus 1,5 metrin etäisyydellä lampusta on 64 luksia.
a) Ilmaise valaistuksen E (lx) riippuvuus etäisyydestä d (m) lausekkeen avulla.
b) Mikä valaistus on 3,5 metrin etäisyydellä lampusta?

Ratkaisu

a) Koska valaistus E on kääntäen verrannollinen etäisyyden d neliöön d^2, riippuvuus on muotoa $E = \frac{k}{d^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin.

Ratkaistaan k.

Kun $d = 1{,}5$, niin $E = 64$, joten

$$\frac{k}{1{,}5^2} = 64 \qquad | \cdot 1{,}5^2$$

$$k = 1{,}5^2 \cdot 64 = 144.$$

Siis $E = \frac{144}{d^2}$.

b) *Tapa 1.* Käytetään a-kohdassa muodostettua lauseketta.

Kun $d = 3{,}5$ (m), niin

$$E = \frac{144}{3{,}5^2} \approx 12 \text{ (lx)}.$$

Tapa 2. Yksittäinen E:n arvo voidaan ratkaista myös verrannon avulla.

Taulukoidaan verrannollisten suureiden arvot.

valaistus	etäisyys^2
64	$1{,}5^2$
E	$3{,}5^2$

Koska valaistus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, niin

$$\frac{E}{64} = \frac{1{,}5^2}{3{,}5^2} \qquad | \cdot 64$$

Valaistusten suhde on vastaavien etäisyyksien neliöiden suhteen käänteisluku.

$$E = 64 \cdot \frac{1{,}5^2}{3{,}5^2} \approx 12 \text{ (lx)}.$$

Vastaus a) $E = \frac{144}{d^2}$ b) 12 lx

Harjoituksia

74. Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h? (Ylioppilaskoe, k. 1988)

75. Neutronivuo (yksikkönä neutronia sekunnissa) on kääntäen verrannollinen säteilylähteen etäisyyden neliöön. Neutronivuo 0,75 metrin etäisyydellä lähteestä oli 32 neutronia sekunnissa.
a) Ilmaise neutronivuo y säteilylähteen etäisyyden x (m) lausekkeena.
b) Kuinka suuri neutronivuo on 3,5 metrin etäisyydellä säteilylähteestä?

76. Kun $x = 9$, niin x:stä riippuvan suureen y arvo on 12. Ilmaise y x:n lausekkeena, jos
a) y on suoraan verrannollinen x:n neliöjuureen
b) y on kääntäen verrannollinen x:n neliöjuureen.

Derivaattafunktiot

Kaikki potenssi- ja juurifunktiot derivoidaan kaavalla

$$\mathrm{D}x^r = rx^{r-1}.$$

Eksponentti pienenee yhdellä ja kertoimeksi tulee alkuperäinen eksponentti.

Ennen derivoimista juurifunktiot ilmaistaan potensseina.

Esimerkiksi $\mathrm{D}\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \mathrm{D}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{D}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

Harjoituksia

77. Derivoi funktio. a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^6 - \dfrac{4}{x^2}$ b) $g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x} - 4$

78. Määritä funktion $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^4}$ derivaattafunktion nollakohdat.

TEHTÄVIÄ

79. Taajaman hallittu kasvu edellyttää, että väkiluku saa seuraavan kahdeksan vuoden aikana kohota nykyisestä 12 000:sta korkeintaan 15 000:een. Kuinka suuri keskimääräinen vuotuinen väestönkasvuprosentti saa enintään olla?

80. Tuotteen hintaa korotetaan kolmesti $p\,\%$, mikä nostaa hinnan kaksinkertaiseksi. Määritä korotusprosentti p. (Ylioppilaskoe, s. 1998)

81. Merenpinnan tasolla painija painoi 80,12 kg. Kuinka korkealla pidettävissä kilpailuissa hän alittaa painorajan 80,00 kg? Painovoima on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Maapallon säde on noin 6 370 km.

82. Laske lausekkeen $2^x \cdot 8^y$ arvo, kun $x = 1 + 3\sqrt{2}$ ja $y = 3 - \sqrt{2}$.

83. Määritä lausekkeen $2\sqrt[4]{3}a^{\frac{3}{2}} - a^3$ tarkka arvo, kun $a = \sqrt[6]{3}$. (Ylioppilaskoe, s. 1981)

84. Ratkaise

a) yhtälö $(x-2)^4 = 9$

b) epäyhtälö $(x-2)^4 < 9$

c) yhtälö $(x-2)^3 = 5$

d) epäyhtälö $(x-2)^3 < 5$.

85. Ratkaise yhtälö

$\sqrt{x(x-3)^2} + \sqrt{x(x-1)^2} = 3$, kun $1 \leqslant x \leqslant 3$.

86. Pistemäärä miesten kymmenottelun päätöslajissa 1 500 metrin juoksussa lasketaan kaavalla $P = 0{,}03768(480{,}00 - T)^{1{,}85}$, missä T on aika sekunteina. Pistemäärä pyöristetään alaspäin kokonaisluvuksi. Ottelun voitosta kilpailevat A ja B, joista A johtaa B:tä 14 pisteellä ennen päätöslajia. B juoksee erässään ajan 3.48,29. Mikä seuraavassa erässä juoksevan A:n ajan tulee olla, jotta hän voittaisi B:n?

87. Osoita käyttämättä likiarvoja, että

$\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

(Ylioppilaskoe, k. 1986)

88. Osoita, että funktio $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{x\sqrt{2+\sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{2+\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}}$

on lineaarinen funktio, ja piirrä sen kuvaaja.
(Ylioppilaskoe, s. 1997)

89. Kumpi luvuista $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[6]{10^{-1001}}}$ ja $y = \sqrt[6]{1 + \sqrt[3]{10^{-1001}}}$ on suurempi?
(Ylioppilaskoe, k. 1989)

90. Ratkaise yhtälöpari $x^{\frac{1}{y}} = 27$, $\left(\frac{x^2}{3}\right)^y = 3$.

(Ylioppilaskoe, k. 1983)

91. Lankun kantokyky on suoraan verrannollinen lankun leveyteen, suoraan verrannollinen lankun paksuuden neliöön ja kääntäen verrannollinen lankun pituuteen. Suurempi lankku on 30 % leveämpi, 15 % paksumpi ja 50 % pitempi kuin samanlaisesta puusta sahattu pienempi lankku. Kuinka monta prosenttia suuremman lankun kantokyky on pienemmän lankun kantokykyä suurempi tai pienempi?

92. Lukujärjestelmän kantaluku on 7. Lausu tämän järjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 kymmenjärjestelmässä. Miten kymmenjärjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 esitetään tässä järjestelmässä? (Ylioppilaskoe, k. 2001)

93. Oletetaan, että pankin korkokanta on p %, kun korko lisätään pääomaan vuosittain. Mikä korkokannan pitäisi olla, jos korko lisättäisiin pääomaan puolivuosittain, jotta tulos pysyisi samana? (Ylioppilaskoe, s. 1999)

Polynomit, polynomiyhtälöt ja -epäyhtälöt

Polynomeilla laskeminen

Laskusäännöt

Polynomien laskusäännöt perustuvat reaalilukujen laskutoimitusten ominaisuuksiin.

Polynomeilla laskettaessa kannattaa laskuvirheiden välttämiseksi merkitä riittävästi välivaiheita.

Esimerkiksi on

$4x^2 - (3x - 1)(x + 2)$ — Ensin lasketaan kertolasku.

$= 4x^2 - (3x^2 + 6x - x - 2)$ — Kertolaskun tulos merkitään sulkeisiin.

$= 4x^2 - (3x^2 + 5x - 2)$

$= 4x^2 - 3x^2 - 5x + 2$ — Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$= x^2 - 5x + 2.$

Muistikaavat

Laskutoimituksia voi joskus lyhentää käyttämällä niin sanottuja muistikaavoja.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	Summan ja erotuksen tulo on neliöiden erotus.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Summan neliö on neliöiden summa lisättynä kaksinkertaisella tulolla.
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Erotuksen neliö on neliöiden summa vähennettynä kaksinkertaisella tulolla.

Esimerkiksi $(3x^4 - 5x^2)^2 = (3x^4)^2 - 2 \cdot 3x^4 \cdot 5x^2 + (5x^2)^2$
$= 9x^8 - 30x^6 + 25x^4.$

Polynomi $4x^2 - 9y^2$ on kahden neliön erotus, joten se on summan ja erotuksen tulo.

$4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

ESIMERKKI 1

Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a ja b pätee $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

Ratkaisu Tutkitaan erotusta $(a+b)^2 - 4ab$.

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2$$
$$= (a-b)^2$$

Koska luvun neliö on epänegatiivinen, niin aina on $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Siis kaikilla a ja b pätee

$(a+b)^2 - 4ab \geqslant 0$

eli

$(a+b)^2 \geqslant 4ab$. □

Harjoituksia

94. Sievennä.

a) $5 - 4(x+1)$ b) $x(x-2) - (x+2)(x-4)$ c) $x - (x-3)^2$

95. Laske. a) $(3a^3 + \frac{1}{2})^2$ b) $(-x+5)^2$ c) $(-t-3)^2$ d) $(-s+3)(s+3)$

96. Sievennä. a) $x - 2(x-2)^2$ b) $(x-2)^3$

97. Jaa tekijöihin. a) $10x^2 - 90$ b) $x^3 + 10x^2 + 25x$

Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö

Jos yhtälössä on nimittäjiä, yhtälö kannattaa ensin kertoa luvulla, joka supistaa nimittäjät pois. Ratkaisuun kannattaa merkitä riittävä määrä välivaiheita.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $\frac{x}{4} - \frac{x-1}{12} = x$.

Ratkaisu

$$\frac{x}{4} - \frac{x-1}{12} = x \qquad | \cdot 12$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}x}{\underset{1}{\cancel{4}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{12}}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{12}}} = 12x \qquad \text{Supistetaan.}$$

$$3x - (x-1) = 12x \qquad \text{Vähentäjä on merkittävä sulkeisiin.}$$

$$3x - x + 1 = 12x$$

$$-10x = -1 \qquad | : (-10)$$

$$x = \frac{1}{10}$$

Vastaus $x = \frac{1}{10}$

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

Kun epäyhtälö jaetaan tai kerrotaan luvulla, niin tulee ottaa huomioon luvun merkki.

- Jos kertoja (jakaja) on positiivinen, niin epäyhtälön suunta säilyy.
- Jos kertoja (jakaja) on negatiivinen, niin epäyhtälön suunta vaihtuu.

Muutoin ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan kuten ensimmäisen asteen yhtälö.

ESIMERKKI 3

Millä vakion a arvoilla epäyhtälön $\frac{1}{4}x + a < \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ ratkaisujoukko sisältää välin $]-1, \infty[$?

Ratkaisu Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\frac{1}{4}x + a < \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \qquad | \cdot 12 > 0 \qquad \text{Suunta säilyy.}$$

$$3x + 12a < 6x + 4$$

$$-3x < 4 - 12a \qquad | : (-3) < 0 \qquad \text{Suunta vaihtuu.}$$

$$x > -\frac{4}{3} + 4a$$

Epäyhtälön toteuttavat luvut, jotka ovat välillä $]-\frac{4}{3} + 4a, \infty[$.

Ratkaisujoukko sisältää välin $]-1, \infty[$, kun

$$-\frac{4}{3} + 4a \leqslant -1$$

$$4a \leqslant \frac{1}{3} \qquad | : 4 > 0 \qquad \text{Suunta säilyy.}$$

$$a \leqslant \frac{1}{12}.$$

Vastaus $a \leqslant \frac{1}{12}$

Harjoituksia

98. Ratkaise yhtälö. a) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3x}{4} - \frac{1}{3}$ b) $\frac{x^2 - x}{2} - \frac{3x^2 - 1}{6} = -x$

99. Ratkaise epäyhtälö. a) $5x > 6x$ b) $3x + 2 \leqslant 8x - 7$

100. Ratkaise epäyhtälö $2x - \frac{x + 4}{4} < \frac{1}{2}$.

101. Linja-automatka mummolaan kestää normaalisti 2 h 45 min. Ajan lyhentäminen 15 minuuttia vaatisi keskinopeuden nostamista 5 km/h. Kuinka pitkä matka mummolaan on?

Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Jokainen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ voidaan ratkaista ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Yhtälö $3x^2 + x = 2$ eli yhtälö $3x^2 + x - 2 = 0$ ratkaistaan ratkaisukaavalla sijoittamalla kaavaan $a = 3$, $b = 1$ ja $c = -2$, jolloin saadaan juuret -1 ja $\frac{2}{3}$.

Erikoistapaukset

Yhtälö $3x^2 + x = 0$ voidaan ratkaista ratkaisukaavalla, mutta se voidaan ratkaista yksinkertaisemmin käyttämällä tulon nollasääntöä.

$$\begin{aligned} 3x^2 + x &= 0 \\ x(3x + 1) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } 3x + 1 &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } \quad x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Yhtälö $4x^2 - 9 = 0$ voidaan ratkaista ratkaisukaavalla, mutta vähemmillä laskuilla päästään, kun yhtälöstä ratkaistaan ensin x^2.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 &= 0 \\ 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{4} \\ x = \frac{3}{2} \text{ tai } x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $x^2 - x + ax - a = 0$.

Ratkaisu

$x^2 - x + ax - a = 0$ Selvitetään ensin yhtälön kertoimet.

$x^2 + (-1 + a)x - a = 0$

$x^2 + (a - 1)x - a = 0$ Toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat 1, $a - 1$ ja $-a$.

$$x = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4a}}{2}$$

$$= \frac{-a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2}$$

$$= \frac{-a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2}$$

$$= \frac{-a + 1 \pm (a + 1)}{2}$$ Katso alaviite.*

$$x = \frac{-a + 1 + (a + 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-a + 1 - (a + 1)}{2} = \frac{-2a}{2} = -a$$

Vastaus $x = 1$ tai $x = -a$

---

* Itse asiassa nyt pitäisi käyttää itseisarvomerkkejä: $x = \frac{-a + 1 \pm |a + 1|}{2}$, sillä $\sqrt{(a+1)^2} = |a + 1|$. Itseisarvomerkit voidaan kuitenkin jättää pois, koska $|a + 1|$ on joko $a + 1$ tai $-(a + 1)$. Vaihtoehdot $\pm(a + 1)$ ovat siten samat kuin $\pm|a + 1|$.

Diskriminantti

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurten lukumäärä riippuu yhtälön ratkaisukaavan juurrettavan eli yhtälön *diskriminantin*

$$D = b^2 - 4ac$$

arvosta.

Yhtälöllä on
- kaksi juurta, jos $D > 0$
- yksi juuri, jos $D = 0$
- ei yhtään juurta, jos $D < 0$.

Esimerkiksi yhtälön $x^2 - 7x + q = 0$ diskriminantti on

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot q = 49 - 4q.$

Yhtälöllä on kaksi juurta, kun $49 - 4q > 0$ eli kun $q < \frac{49}{4}$.

Toisen asteen polynomin tekijät

Toisen asteen polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijät löydetään ratkaisemalla polynomin nollakohdat.*

- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta x_1 ja x_2, niin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on yksi juuri (ns. *kaksoisjuuri*) x_1, niin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole juuria, niin polynomi $ax^2 + bx + c$ ei jakaudu ensimmäisen asteen tekijöihin eli polynomi on *jaoton*.

Esimerkiksi toisen asteen polynomifunktion $3x^2 + x - 2$ nollakohdat ovat -1 ja $\frac{2}{3}$, joten $3x^2 + x - 2 = 3(x + 1)(x - \frac{2}{3}) = (x + 1)(3x - 2)$.

---

* Yleisesti, jos a on polynomifunktion $P(x)$ nollakohta, niin $x - a$ on polynomin $P(x)$ tekijä. Esimerkiksi polynomifunktiolla $x^3 - 8x - 7$ on nollakohta -1, sillä $(-1)^3 - 8 \cdot (-1) - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$. Siis polynomilla $x^3 - 8x - 7$ on tekijä $x - (-1) = x + 1$ eli $x^3 - 8x - 7 = Q(x)(x + 1)$, missä $Q(x)$ on toisen asteen polynomi. Polynomi $Q(x)$ löydetään polynomien jakolaskulla, johon on perehdytty syventävässä kurssissa Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä.

Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälö

$ax^2 + bx + c > 0$ (tai < 0 tai $\geqslant 0$ tai $\leqslant 0$)

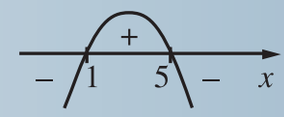
ratkaistaan selvittämällä toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$ arvojen merkit. Koska polynomifunktio on kaikkialla määritelty ja kaikkialla jatkuva, funktion arvojen merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa. Epäyhtälö ratkaistaan niin, että

- ensin ratkaistaan funktion $ax^2 + bx + c$ nollakohdat
- sitten päätellään merkit hahmottelemalla kuvaajaparaabeli.*

Ratkaistaan esimerkiksi epäyhtälö $6x - x^2 > 5$ eli epäyhtälö $-x^2 + 6x - 5 > 0$.

Ratkaisemalla yhtälö $-x^2 + 6x - 5 = 0$ ratkaisukaavalla löydetään funktion $-x^2 + 6x - 5$ nollakohdat 1 ja 5.

Funktion $-x^2 + 6x - 5$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2 + 6x - 5 > 0$ toteutuu, kun $1 < x < 5$.

---

* Funktion merkit nollakohtien rajaamilla lukusuoran osaväleillä voidaan päätellä myös niin, että lasketaan jokaiselta väliltä yksi funktion arvo.

ESIMERKKI 5

Ratkaise epäyhtälö $|3x + 1| \geqslant |x|$.

Ratkaisu

Koska epäyhtälön $|3x + 1| \geqslant |x|$ molemmat puolet ovat epänegatiiviset, epäyhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun epäyhtälön kanssa.*

$$|3x + 1| \geqslant |x| \qquad |a|^2 = a^2$$

$$(3x + 1)^2 \geqslant x^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 \geqslant x^2$$

$$8x^2 + 6x + 1 \geqslant 0$$

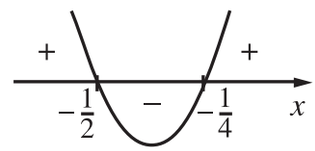
Ratkaistaan funktion $8x^2 + 6x + 1$ nollakohdat.

$$8x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{16} = \frac{-6 \pm 2}{16}$$

$$x = \frac{-6 + 2}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 - 2}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Funktion $8x^2 + 6x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $8x^2 + 6x + 1 \geqslant 0$ toteutuu, kun $x \leqslant -\frac{1}{2}$ tai $x \geqslant -\frac{1}{4}$.

Vastaus

$x \leqslant -\frac{1}{2}$ tai $x \geqslant -\frac{1}{4}$

---

* Yhtäpitävyys perustuu seuraavaan lukujen ominaisuuteen: Kun kaksi epänegatiivista lukua korotetaan neliöön, lukujen suuruusjärjestys pysyy samana. Negatiivisten lukujen suuruusjärjestys vaihtuu. Jos luvut ovat erimerkkiset, niin luvuista riippuen järjestys joko säilyy tai vaihtuu.

Harjoituksia

102. Ratkaise yhtälö.

a) $9x(2-x)=5$ b) $\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}=0$

103. Ratkaise yhtälö $|3x^2+x-6|=|2x^2+x+6|$.

104. Millä vakion q arvoilla funktiolla $3x^2-8x+q$ on ainakin yksi nollakohta?

105. Ratkaise epäyhtälö. a) $x^2-2>10$ b) $-x^2-x\geqslant 0$

106. Luonnollisia lukuja a, b ja c sanotaan Pythagoraan luvuiksi, jos on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c. Määritä kaikki peräkkäiset luonnolliset luvut, jotka ovat Pythagoraan lukuja.
(Ylioppilaskoe, s. 1997)

107. Ratkaise yhtälö $(x^2-3x+1)^4=1$.

108. Jaa polynomi tekijöihin. a) $x^2-2x-35$ b) $12x^2+x-6$

Korkeamman asteen yhtälö ja epäyhtälö

Korkeamman asteen yhtälö

Kolmannen ja korkeamman asteen polynomiyhtälö $P(x)=0$ voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla, jos polynomi P onnistutaan jakamaan ensimmäisen ja toisen asteen tekijöihin.

Esimerkiksi yhtälön $x^3+5x^2+6x=0$ termeillä on yhteinen tekijä x.

$x^3+5x^2+6x=0$

$x(x^2+5x+6)=0$

$x=0$ tai $x^2+5x+6=0$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan:

$x=0$ tai $x=-2$ tai $x=-3$.

ESIMERKKI 6

Ratkaise yhtälö $(x + 1)(x^2 + 2x) = (x + 1)(x + 6)$.

Ratkaisu

Yhtälön molemmilla puolilla on tekijänä binomi $x + 1$. Siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle ja erotetaan yhteinen tekijä.*

$$(x + 1)(x^2 + 2x) = (x + 1)(x + 6)$$

$$(x + 1)(x^2 + 2x) - (x + 1)(x + 6) = 0$$

$$(x + 1)((x^2 + 2x) - (x + 6)) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + x - 6) = 0$$ Tulon nollasääntö.

$x + 1 = 0$ tai $x^2 + x - 6 = 0$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = -1 \text{ tai } x = 2 \text{ tai } x = -3$$

Vastaus $x = -3$ tai $x = -1$ tai $x = 2$

Korkeamman asteen yhtälö voidaan joskus purkaa alemman asteen yhtälöiksi myös muilla keinoilla.

Esimerkiksi yhtälö $(x^3 + 3)^2 = 16$ toteutuu, kun

$$x^3 + 3 = 4 \text{ tai } x^3 + 3 = -4$$

$$x^3 = 1 \text{ tai } x^3 = -7$$

$$x = 1 \text{ tai } x = \sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7}.$$

* Yhtälön voi jakaa vain sellaisella lausekkeella, jolla ei ole nollakohtia. Tämän esimerkin yhtälöä ei saa jakaa lausekkeella $x + 1$.

ESIMERKKI 7

Ratkaise yhtälö $(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2$.

Ratkaisu

$(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2$ $\quad a^2 = b^2$, jos ja vain jos $a = b$ tai $a = -b$.

$x^2 + x + 1 = 2x + 1$ tai $x^2 + x + 1 = -(2x + 1)$

$x^2 + x + 1 = 2x + 1$ tai $x^2 + x + 1 = -2x - 1$

$x^2 - x = 0$ tai $x^2 + 3x + 2 = 0$ $\quad$ Ratkaistaan toisen asteen yhtälöt.

$x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$ tai $x = -2$

Vastaus $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 1$

Yhtälö voidaan joskus ratkaista myös niin, että ensin ratkaistaan sopivan sijoituksen avulla jonkin muuttujan lausekkeen arvot.

ESIMERKKI 8

Ratkaise yhtälö $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Ratkaisu

Yhtälössä $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ on pelkästään tuntemattoman parillisia potensseja. Ratkaistaan yhtälöstä ensin x^2 sijoittamalla $x^2 = t$.

$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ $\quad$ Merkitään $x^2 = t$.

$t^2 - 4t - 5 = 0$ $\quad$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$t = 5$ tai $t = -1$

Koska $t = x^2$, niin $x^2 = 5$ tai $x^2 = -1$.

Yhtälö $x^2 = 5$ toteutuu, kun $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$. Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole juuria.

Vastaus $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$

Korkeamman asteen epäyhtälö

Kolmannen ja korkeamman asteen epäyhtälö $P(x) > 0$ (tai < 0 tai $\geqslant 0$ tai $\leqslant 0$) ratkaistaan selvittämällä funktion $P(x)$ arvojen merkit.
Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, niin

- ensin ratkaistaan funktion $P(x)$ nollakohdat
- sitten määritetään funktion arvojen merkit laskemalla yksi funktion arvo jokaiselta nollakohtien rajaamalta lukusuoran osaväliltä
- lopuksi merkit kootaan merkkikaavioon, josta päätellään epäyhtälön ratkaisu.

ESIMERKKI 9

Ratkaise epäyhtälö $x^3 + 6x \leqslant 5x^2$.

Ratkaisu

$x^3 + 6x \leqslant 5x^2$ Saatetaan epäyhtälö muotoon $P(x) \leqslant 0$.

$x^3 - 5x^2 + 6x \leqslant 0$

Ratkaistaan funktion $x^3 - 5x^2 + 6x$ nollakohdat.

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - 5x + 6 = 0$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = 3$

Lasketaan yksi funktion arvo jokaiselta nollakohtien rajaamalta lukusuoran osaväliltä ja merkitään arvon merkki merkkikaavioon.*

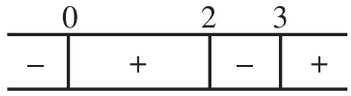
* Nyt joudutaan laskemaan saman funktion arvoja useissa eri kohdissa. Funktion lauseke kannattaa syöttää laskimeen piirrettäväksi funktioksi ja käyttää hyväksi laskimen toimintoa, jolla voidaan laskea piirrettävän funktion arvoja.

$x = -1$: $(-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -12 < 0$*

$x = 1$: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 2 > 0$

$x = 2{,}5$: $(2{,}5)^3 - 5 \cdot (2{,}5)^2 + 6 \cdot 2{,}5 = -0{,}625 < 0$

$x = 10$: $10^3 - 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 = 560 > 0$



Epäyhtälön $x^3 - 5x^2 + 6x \leqslant 0$ ratkaisuun sisältyvät myös funktion $x^3 - 5x^2 + 6x$ nollakohdat.

Epäyhtälö toteutuu, kun $x \leqslant 0$ tai $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Vastaus $x \leqslant 0$ tai $2 \leqslant x \leqslant 3$

Harjoituksia

109. Ratkaise a) yhtälö $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ b) epäyhtälö $x^3 - 7x^2 + 10x < 0$.

110. Ratkaise yhtälöt a) $(2x + 1)(1 - 2x)(x + 1) = 0$,
b) $(2x + 1)(1 - 2x)(x + 1) = 1$. (Ylioppilaskoe, k. 1999)

111. Ratkaise yhtälö $3x(3x^2 - 2x - 1) = 3x^2 - 2x - 1$.

112. Ratkaise epäyhtälö $x^3 \geqslant 16x$.

113. Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

114. Muodosta
a) jokin kolmannen asteen yhtälö, jolla on juuret -3, -1 ja 2
b) kolmannen asteen polynomifunktio $P(x)$, jolla on nollakohdat -3, -1 ja 2 ja jonka arvo kohdassa 1 on -72.

---

* Ensin laaditaan tyhjä merkkikaavio, josta selviävät nollakohtien määräämät välit. Jokaiselta väliltä valitaan yksi luku, määritetään arvon merkki ja merkitään kaavioon.

Neliöjuuriyhtälö

Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen

Muotoa

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

olevasta yhtälöstä voidaan poistaa neliöjuuri korottamalla yhtälön molemmat puolet neliöön. Neliöön korotetulla yhtälöllä (samoin kuin muuhunkin parilliseen potenssiin korotetulla yhtälöllä) saattaa kuitenkin olla juuria, jotka eivät toteuta alkuperäistä yhtälöä. Vääriltä juurilta voidaan välttyä kahdella tavalla.

Neliöönkorotusehto

Päätellään ehto, jonka vallitessa $g(x) \geqslant 0$. Tällöin yhtälön molemmat puolet ovat samanmerkkiset ja yhtälö on yhtäpitävä neliöön korotetun yhtälön

$$f(x) = g(x)^2$$

kanssa.

Tarkistaminen

Jos neliöönkorotusehtoa ei laadita, niin yhtälöstä $f(x) = g(x)^2$ saadut juuret on tarkistettava sijoittamalla ne alkuperäiseen yhtälöön $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Tarkistaminen on tällöin välttämätön osa neliöjuuriyhtälön ratkaisua.

ESIMERKKI 10

Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+7} + x + 1 = 0$.

Ratkaisu

Yhtälö $\sqrt{x+7} + x + 1 = 0$ on määritelty, kun $x + 7 \geqslant 0$ eli $x \geqslant -7$.

$\sqrt{x+7} + x + 1 = 0$ Yhtälö saatetaan muotoon $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

$\sqrt{x+7} = -x - 1$

Tapa 1. Asetetaan neliöönkorotusehto.

Yhtälön $\sqrt{x+7} = -x - 1$ molemmat puolet ovat epänegatiivisia, kun $-x - 1 \geqslant 0$ eli kun $x \leqslant -1$. Yhtälön neliöönkorotusehto on $x \leqslant -1$.

$\sqrt{x+7} = -x - 1$ Korotetaan neliöön.

$x + 7 = (-x - 1)^2$ Koska $-x - 1 = -(x + 1)$, niin $(-x - 1)^2 = (x + 1)^2$.

$x + 7 = 1 + 2x + x^2$

$-x^2 - x + 6 = 0$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$x = 2$ tai $x = -3$

Molemmat juuret kuuluvat yhtälön määrittelyjoukkoon.

Juuri $x = -3$ toteuttaa neliöönkorotusehdon $x \leqslant -1$.

Yhtälön ratkaisu on $x = -3$.

Tapa 2. Korotetaan neliöön ja tarkistetaan.

$\sqrt{x+7} = -x - 1$

$x + 7 = (-x - 1)^2$ Ratkaistaan yhtälö kuten edellä.

$x = 2$ tai $x = -3$

Tarkistetaan juuret sijoittamalla ne yhtälöön $\sqrt{x+7} = -x - 1$.

Sijoitetaan $x = 2$.

$\sqrt{2+7} = -2 - 1$

$3 = -3$

epätosi

Juuri $x = 2$ ei toteuta yhtälöä.

Sijoitetaan $x = -3$.

$\sqrt{-3+7} = 3 - 1$

$2 = 2$

tosi

Juuri $x = -3$ toteuttaa yhtälön.

Yhtälön ratkaisu on $x = -3$.

Vastaus $x = -3$

Harjoituksia

115. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+6} + x = 0$.

116. Ratkaise yhtälö $(\sqrt{1-2x} + 1)^2 = 16$. (Ylioppilaskoe, s. 1994)

117. Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{1-2x} < 2$. (Ylioppilaskoe, k. 1992)

Polynomifunktion derivaatta

Polynomifunktion derivoiminen

Polynomifunktio derivoidaan termeittäin käyttäen potenssifunktion derivointikaavaa.

Esimerkiksi $\mathrm{D}(\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1) = \frac{3}{2} \cdot 4x^3 - 5 \cdot 1 + 0 = 6x^3 - 5.$

Polynomifunktion potenssi derivoidaan käyttäen funktion potenssin derivointikaavaa

$$\mathrm{D}f(x)^r = rf(x)^{r-1} f'(x).$$

Esimerkiksi

$$\mathrm{D}(5x^2 - 1)^3 = 3 \cdot (5x^2 - 1)^2 \cdot \mathrm{D}(5x^2 - 1)$$
$$= 3 \cdot (5x^2 - 1)^2 \cdot 10x = 30x(5x^2 - 1)^2,$$

$$\mathrm{D}\sqrt{5x^2 - 1} = \mathrm{D}(5x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(5x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}(5x^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(5x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 10x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 1}} \cdot 10x$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{5x^2 - 1}}.$$

Harjoituksia

118. Millä arvoilla x funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ derivaatta saa arvon nolla? (Ylioppilaskoe, s. 1997)

119. Määritä funktion $f(x) = (x^3 - 6x)^5$ derivaattafunktion nollakohdat.

120. Derivoi funktio.

a) $\sqrt{5x - 1}$ b) $\dfrac{1}{(5x - 1)^2}$

TEHTÄVIÄ

121. Ratkaise yhtälö $3 - \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \sqrt{x}$.

122. Määritä sellainen luku x, että lukujen $\pi + 1$, $\pi + x$ ja πx keskiarvo on 2π.
(Ylioppilaskoe, k. 1998)

123. Ratkaise yhtälö $1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$.
(Ylioppilaskoe, s. 1983)

124. Ratkaise yhtälö $x|x-5| = -6$.

125. Ratkaise epäyhtälö $|3x-2| \geqslant |-x+1|$.
(Ylioppilaskoe, s. 1995)

126. Ratkaise yhtälö
$(x^3 - 3x + 2)^2 = (x^3 + x^2 - 2)^2$.

127. Ratkaise yhtälö.
a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ b) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$

128. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{5}x - 1 < \frac{1}{4}x + a$, jossa $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Tutki sitten, millä a:n arvolla epäyhtälön ratkaisujoukko on väli $]5, \infty[$.
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

129. Ratkaise epäyhtälö
$(3x + 1)(x^2 - 4) < 2(x^2 - 4)$.

130. Mikä ehto vakion k tulee täyttää, jotta funktion $f(x) = x^2 + kx + k$ kaikki arvot olisivat positiivisia?

131. Osoita, että
a) kaikilla reaaliluvuilla a ja b on
$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$
b) kaikilla $a \neq 0$ on $(a + \frac{1}{a})^2 \geqslant 4$.

132. Yhtälössä $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ korvataan luku a luvulla $a + 1$. Miten muuttuvat yhtälön juuret? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

133. Määritä vakio a niin, että yhtälöllä $x^2 + x - ax + a + 2 = 0$ on kaksoisjuuri. Mikä tämä juuri silloin on?

134. Osoita, että yhtälöllä $(x-a)(x-b) = 1$ on kaikilla vakioiden a ja b arvoilla kaksi erisuurta reaalijuurta.

135. Suorakulmion pinta-ala on $30\ \text{m}^2$ ja piiri enintään 24 m. Mitä arvoja suorakulmion sivujen pituudet voivat saada? (Ylioppilaskoe, k. 2002)

136. Kahdeksi vuodeksi otettu $10\,000$ euron laina sovittiin maksettavaksi niin, että vuoden kuluttua ensimmäisen vuoden korko lisätään lainapääomaan ja koko laina korkoineen maksetaan takaisin laina-ajan päätyttyä. Sovittiin myös, että toisen vuoden korko on kaksi prosenttiyksikköä ensimmäisen vuoden korkoa suurempi. Takaisin maksettavan summan suuruuden laskettiin olevan $11\,501{,}60$ euroa. Mitkä sovitut korkoprosentit olivat?

137. Kahden positiivisen luvun summan neliö jaetaan samojen lukujen neliöiden summalla. Osoita, että osamäärän arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin 2.

138. Kahden positiivisen luvun a ja b geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri $\sqrt{ab}$. Osoita, että geometrinen keskiarvo on aina pienempi tai yhtä suuri kuin lukujen tavallinen (aritmeettinen) keskiarvo $\frac{a+b}{2}$.

139. Kumpi luvuista $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ja ab on suurempi, kun $a \neq 0$ ja $b \neq 0$? Esimerkit eivät kelpaa perusteluksi. (Ylioppilaskoe, s. 1992)

140. Osoita, että jos $x + y + z = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, niin $xy + yz + zx = -\frac{1}{2}$.

(Ylioppilaskoe, s. 2000)

141. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c on $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Milloin yhtäsuuruus pätee?

142. Funktio f on määritelty koko reaalilukujen joukossa, ja $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ kaikilla x ja y. Määritä funktio f.

143. Lukujen a ja b summa on 1 ja tulo -3. Määritä lukujen a ja b neliöiden summa ja kuutioiden summa.

Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio

Rationaalifunktio

Murtolauseke on kahden polynomin osamäärä.

Esimerkiksi lauseke $\frac{12-4x}{x^2-9}$ on murtolauseke.

Rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa.

Esimerkiksi funktio $f(x)=\frac{12-4x}{x^2-9}+x-2$ on rationaalifunktio.

Määrittelyjoukko

Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa.

Esimerkiksi funktio $f(x)=\frac{12-4x}{x^2-9}+x-2$ ei ole määritelty, kun $x^2-9=0$ eli kun $x=-3$ tai $x=3$. Funktio f on määritelty, kun $x\neq 3$ ja $x\neq -3$, eli funktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

Supistaminen

Murtolauseke voidaan supistaa osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä. Yhteiset tekijät nähdään, kun osoittaja ja nimittäjä saatetaan tulon muotoon.

Esimerkiksi $\frac{12-4x}{x^2-9}=\frac{4(3-x)}{(x+3)(x-3)}=\frac{4(\overset{-1}{\cancel{-x+3}})}{(x+3)(\underset{1}{\cancel{x-3}})}=-\frac{4}{x+3}$.

Jatkuvuus ja raja-arvo

Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, eli jos rationaalifunktio f on määritelty kohdassa a, niin

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Raja-arvo kohdassa a on sama kuin funktion f arvo kohdassa a.

Jos on määritettävä rationaalifunktion raja-arvo sellaisessa kohdassa, jossa funktio ei ole määritelty, niin funktion lauseke pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kyseisessä kohdassa.

Esimerkiksi funktion $\dfrac{12-4x}{x^2-9}$ raja-arvo kohdassa 3 on

$$\lim_{x \to 3} \frac{12-4x}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} -\frac{4}{x+3} = -\frac{4}{3+3} = -\frac{2}{3}.$$

Harjoituksia

144. Mikä funktion määrittelyjoukko on?

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x-2}{2+x}$ b) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2+4}$ d) $\dfrac{x+1}{(x+4)^2}$

145. Supista, jos mahdollista.

a) $\dfrac{6}{6x+3}$ b) $\dfrac{3x^2}{6x^2+x}$ c) $\dfrac{x-2}{10-5x}$

146. Supista, jos mahdollista.

a) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x-x^2}{x^2-1}$ c) $\dfrac{(1-x)^2}{x^2-1}$ d) $\dfrac{(1+x)^2}{x^2+1}$

147. Määritä. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x-15x^2}{3x+5x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5x}{x-3}$

148. Määritä funktion $\dfrac{9x^2-1}{12x-4}$ raja-arvo kohdassa $\dfrac{1}{3}$.

Rationaalilausekkeilla laskeminen

Laskusäännöt Rationaalilausekkeilla laskettaessa noudatetaan samoja laskusääntöjä kuin murtoluvuilla laskettaessa.

ESIMERKKI 1

Laske. a) $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2-x}$ b) $(1 - \frac{2}{x}) : (2 + \frac{1}{x})$

Ratkaisu

a) Yhteen- ja vähennyslaskussa lausekkeet lavennetaan ensin samannimisiksi.

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x(x-1)}$$

Yksinkertaisten laventajien löytämiseksi nimittäjät jaetaan tekijöihin.

$$= \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x+1}{x(x-1)}$$

Osoittajaksi tulee osoittajien erotus ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.

$$= \frac{(x-1)-(x+1)}{x(x-1)}$$

Vähentäjä merkitään sulkeisiin.

$$= \frac{x-1-x-1}{x(x-1)} = -\frac{2}{x(x-1)}$$

b) $(1 - \frac{2}{x}) : (2 + \frac{1}{x})$

Jakaja ja jaettava saatetaan murtolausekkeen muotoon.

$$= \frac{x-2}{x} : \frac{2x+1}{x}$$

Osamäärää laskettaessa jaettava kerrotaan jakajan käänteislausekkeella.

$$= \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x}{2x+1}$$

Kertolaskussa osoittajaksi tulee osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo.

$$= \frac{(x-2) \cdot x}{x \cdot (2x+1)}$$

Supistetaan.

$$= \frac{x-2}{2x+1}$$

Vastaus a) $-\frac{2}{x(x-1)}$ b) $\frac{x-2}{2x+1}$

Harjoituksia

149. Laske. a) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{2}{x}$ b) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{3}{2x+6}$

150. Laske. a) $-\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+x}$ b) $\frac{3}{x^2-1} - \frac{4}{x^2+x}$

151. Sievennä lauseke. a) $(1-\frac{1}{x}) \cdot \frac{x}{(1-x)^2}$ b) $\frac{\frac{1}{x}-x}{x-1}$

152. Sievennä lauseke $(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}) : (\frac{x}{1-\sqrt{x}} + \frac{x}{1+\sqrt{x}})$.

153. Määritä $\lim\limits_{x \to 1} ((\frac{1}{x^2} - 1) : (x-1))$.

154. Sievennä lauseke $\dfrac{x + \frac{1}{x} - 2}{x - \frac{1}{x}}$.

Rationaaliyhtälö

Rationaaliyhtälön ratkaiseminen

Rationaaliyhtälöä ratkaistaessa on ensin selvitettävä yhtälön määrittelyjoukko.

Esimerkiksi yhtälö $\frac{x^2+2x-3}{x+3} = 0$ on määritelty, kun $x \neq -3$.

Yhtälö toteutuu, kun osoittaja on nolla eli $x^2 + 2x - 3 = 0$. Ratkaisukaavalla saadaan $x = -3$ tai $x = 1$. Luku -3 ei kuulu yhtälön määrittelyjoukkoon, joten yhtälön ainoa juuri on $x = 1$.

Yleisesti rationaaliyhtälö voidaan ratkaista niin, että yhtälö kerrotaan lausekkeella, joka supistaa nimittäjät pois ja joka on yhtälön määrittelyjoukossa eri suuri kuin nolla.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $1 - \frac{1}{x} = -\frac{3x}{x+1}$.

Ratkaisu

Yhtälö on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.

$$1 - \frac{1}{x} = -\frac{3x}{x+1} \qquad \left| \cdot x(x+1) \neq 0 \right.$$

$$x(x+1) - \frac{\overset{1}{\cancel{x}}(x+1)}{\underset{1}{\cancel{x}}} = -\frac{3x \cdot \overset{1}{\cancel{x(x+1)}}}{\underset{1}{\cancel{x+1}}} \qquad \text{Supistetaan.}$$

$$x(x+1) - (x+1) = -3x^2$$

$$x^2 + x - x - 1 = -3x^2$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

Molemmat juuret kuuluvat yhtälön määrittelyjoukkoon.

Vastaus

$x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{1}{2}$

Harjoituksia

155. Määritä funktion nollakohdat. a) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ b) $\frac{(x+3)^4}{x^2 + 9}$

156. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{x} - \frac{x}{x+3} = 0$. (Ylioppilaskoe, k. 2001)

157. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} = 3$.

158. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2x} - \frac{1 + 2x}{4x^2} = -x^2$.

Rationaaliepäyhtälö

Epäyhtälön kertominen lausekkeella

Koska epäyhtälön suunta säilyy tai vaihtuu kertojan merkistä riippuen, epäyhtälön saa kertoa vain sellaisella lausekkeella, joka epäyhtälön määrittelyjoukossa saa pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja.

Esimerkiksi epäyhtälö $\frac{4x}{x^2+3} < 1$ voidaan kertoa lausekkeella x^2+3, sillä $x^2+3 > 0$ kaikilla x. Saadaan toisen asteen epäyhtälö $4x < x^2+3$ eli $-x^2+4x-3 < 0$.

Epäyhtälöä $\frac{x^2+3}{x-1} \leqslant x$ ei voida kertoa lausekkeella $x-1$, sillä lauseke $x-1$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Rationaaliepäyhtälön ratkaiseminen

Koska rationaalifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty, rationaaliepäyhtälö voidaan yleisesti ratkaista seuraavasti.*

- Epäyhtälö saatetaan termejä siirtämällä muotoon

  $R(x) > 0$ (tai < 0 tai $\geqslant 0$ tai $\leqslant 0$).
- Ratkaistaan funktion $R(x)$ nollakohdat.
- Laaditaan funktion $R(x)$ merkkikaavio, jossa nollakohtien lisäksi ovat kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.

---

* Menetelmällä voidaan ratkaista kaikki epäyhtälöt.

ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^2+3}{x-1} \leqslant x$.

Ratkaisu Epäyhtälö on määritelty, kun $x \neq 1$.

$$\frac{x^2+3}{x-1} \leqslant x$$

Saatetaan epäyhtälö muotoon $R(x) \leqslant 0$.

$$\frac{x^2+3}{x-1} \overset{\cdot(x-1)}{-} x \leqslant 0$$

Nollakohtien määrittäminen ja merkin tutkiminen on helpompaa, kun lauseke saatetaan murtolausekkeen muotoon.

$$\frac{x^2+3}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{3+x}{x-1} \leqslant 0$$

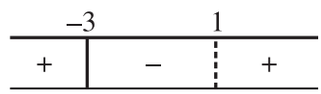
Funktion nollakohta on $x = -3$, ja funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 1$.

Laaditaan merkkikaavio.

$x = -4$: $\dfrac{3-4}{-4-1} = \dfrac{1}{5} > 0$

$x = 0$: $\dfrac{3+0}{0-1} = -3 < 0$

$x = 3$: $\dfrac{3+3}{3-1} = 3 > 0$



Epäyhtälö $\dfrac{x+3}{x-1} \leqslant 0$ toteutuu myös funktion nollakohdassa $x = -3$.

Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 \leqslant x < 1$.

Vastaus $-3 \leqslant x < 1$

Harjoituksia

159. Ratkaise epäyhtälö. a) $\frac{2}{x} \geqslant \frac{6}{x^2}$ b) $\frac{5x}{x^2+4} < 1$

160. Millä muuttujan x arvoilla funktion $\frac{x-3}{x}$ arvot ovat positiivisia?

161. Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{x+1} - 1 > 0$.

162. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x^2+6}{x+2} \leqslant x$.

Rationaalifunktion derivaatta

Osamäärän derivointikaava

Rationaalifunktioita derivoitaessa tarvitaan funktioiden osamäärän derivointikaavaa

$$\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Esimerkiksi funktion $\frac{x^2}{3x-1}$ derivaattafunktio on

$$\mathrm{D}\frac{x^2}{3x-1} = \frac{2x \cdot (3x-1) - x^2 \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}.$$

Harjoituksia

163. Derivoi funktio $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ ja määritä derivaattafunktion nollakohdat. Millä muuttujan arvoilla on $f'(x) > 0$?

164. Derivoi funktio $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+5}{x+1}$ ja määritä derivaattafunktion nollakohdat.

TEHTÄVIÄ

165. Ratkaise yhtälö $\dfrac{(x+1)^2-\pi^2}{x^2+\pi^2}=0$.

(Ylioppilaskoe, s. 1996)

166. Ratkaise yhtälö $\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1}{x}=2$.

167. a) Sievennä lauseke $\dfrac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+1}$.

b) Sievennä lauseke $\dfrac{x-1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$.

c) Ratkaise tämän jälkeen yhtälö

$$\frac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x-1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}.$$

(Ylioppilaskoe, k. 2000)

168. Puolet matkasta ajettiin keskinopeudella 80 km/h. Millä keskinopeudella loppumatka on ajettava, jotta keskinopeudeksi koko matkalla tulisi 60 km/h?

169. Osoita, että jos n on pariton kokonaisluku ($|n|\neq 1$), niin murtoluku $\dfrac{n^2-1}{n^2+3}$ supistuu luvulla 4.

170. Yhteiselle retkelle tilatun linja-auton vuokra oli 1 440 euroa. Vuokra oli sovittu maksettavaksi keräämällä matkan aikana jokaiselta osallistujalta yhtä suuri rahasumma. Neljä retkelle ilmoittautunutta jäi saapumatta, minkä jälkeen jokainen osallistuja joutui maksamaan 5 euroa ennakoitua enemmän. Kuinka monta henkeä retkelle osallistui? Paljonko jokainen heistä joutui maksamaan?

171. Kun funktion $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ muuttujalle x annetaan eräät peräkkäiset kokonaislukuarvot, niin funktion arvo pysyy samana. Mitkä nämä kokonaislukuarvot ovat?

172. Kaupungit A ja B sijaitsevat tasaisesti virtaavan joen varrella 75 kilometrin etäisyydellä toisistaan. Kaupunkien välillä kulkevalta jokilaivalta kuluu edestakaiseen matkaan 7,0 tuntia. Laiva kulkee tasaisella nopeudella, joka on seisovassa vedessä 25 kilometriä tunnissa. Mikä joen virtausnopeus (yksikkönä m/s) on?

173. Millä vakion a arvoilla funktiolla $\dfrac{2x^2+5x-3}{x-a}$ on raja-arvo kohdassa a? Mikä raja-arvo tällöin on?

174. Ratkaise epäyhtälö $\left|\dfrac{2x+1}{3x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<0{,}01$.

(Ylioppilaskoe, k. 1990)

175. Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{2x}{3}<\dfrac{1-3x}{x-2}$.

(Ylioppilaskoe, k. 1987)

176. Kahden positiivisen luvun harmoninen keskiarvo on lukujen käänteislukujen keskiarvon käänteisluku.

a) Puolet matkasta ajetaan nopeudella v_1 ja puolet nopeudella v_2. Osoita, että keskinopeus koko matkalla on nopeuksien v_1 ja v_2 harmoninen keskiarvo. Laske keskinopeus koko matkalla, jos $v_1=40$ km/h ja $v_2=80$ km/h.

b) Kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri. Osoita, että geometrinen keskiarvo on aina suurempi tai yhtä suuri kuin harmoninen keskiarvo.

177. a) Olkoot a ja b positiivisia lukuja. Todista epäyhtälöt

(i) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a + b)^2$ ja

(ii) $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a + b) \geqslant 4$.

b) Määritä lausekkeen $(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2$ pienin arvo, kun x ja y ovat positiivisia lukuja, joille pätee $x + y = 1$.

Eksponentti- ja logaritmifunktio

Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktio

Funktio k^x, missä $k > 0$, on *eksponenttifunktio*.

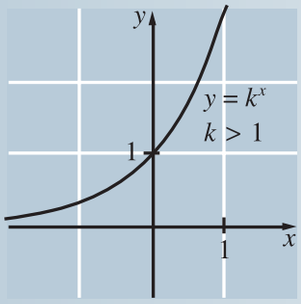
Tärkein eksponenttifunktio on e^x, missä e on *Neperin luku*. Neperin luku e on irrationaaliluku, jonka viisidesimaalinen likiarvo on $e \approx 2{,}71828$.

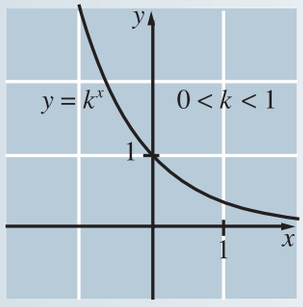
Eksponenttifunktion ominaisuuksia

Eksponenttifunktio on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla, ja se on jatkuva kaikkialla.

Kun $k \neq 1$, eksponenttifunktion k^x arvojoukko on positiivisten reaalilukujen joukko $]0, \infty[$.

Funktio k^x on aidosti kasvava, kun $k > 1$, ja aidosti vähenevä, kun $0 < k < 1$.





Eksponentiaalinen muutos

Jos suureen y riippuvuuden suureesta x ilmaisee funktio $y = ak^x$, niin suure y muuttuu *eksponentiaalisesti.*

Jos esimerkiksi bakteerien määrä tulee joka tunti 7,8-kertaiseksi ja määrä nyt on 1 200, niin x tunnin kuluttua bakteerien määrä on $7{,}8^x \cdot 1\,200$.
Määrä 1,5 tunnin kuluttua on $7{,}8^{1{,}5} \cdot 1\,200 \approx 26\,000$, ja
määrä 20 minuuttia sitten oli $7{,}8^{-\frac{1}{3}} \cdot 1\,200 \approx 610$.

Eksponenttiyhtälö ja -epäyhtälö

Eksponenttiyhtälö ja -epäyhtälö voidaan joskus ratkaista niin, että molemmat puolet ilmaistaan saman kantaluvun potensseina.

ESIMERKKI 1

Ratkaise epäyhtälö $\frac{9^x}{3} < \sqrt{3}$.

Ratkaisu

$\frac{9^x}{3} < \sqrt{3}$ Epäyhtälön molemmat puolet ilmaistaan luvun 3 potensseina.

$\frac{(3^2)^x}{3} < 3^{\frac{1}{2}}$ Käytetään potenssikaavoja.

$\frac{3^{2x}}{3} < 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{2x-1} < 3^{\frac{1}{2}}$ Koska eksponenttifunktio 3^x on aidosti kasvava, funktion arvojen suuruusjärjestys on sama kuin eksponenttien suuruusjärjestys.

$2x - 1 < \frac{1}{2}$

$2x < \frac{3}{2}$ $\quad | : 2 > 0$

$x < \frac{3}{4}$

Vastaus $x < \frac{3}{4}$

Harjoituksia

178. Radioaktiivisesta radonkaasusta hajoaa vuorokaudessa 17 %. Kaasun määrä on nyt 75 mg. Muodosta funktio $m(t)$, joka ilmaisee kaasun määrän t vuorokauden kuluttua. a) Paljonko kaasua on 1,5 vuorokauden kuluttua? b) Paljonko kaasua oli 20 tuntia sitten?

179. Ratkaise yhtälö. a) $3 \cdot 3^x = 27^x$ b) $100^x = 1000^{1-x}$

180. Ratkaise epäyhtälö $e^{x^2} < e^{-x}$.

Logaritmifunktio

Oletetaan, että $k > 0$ ja $k \neq 1$. Koska eksponenttifunktio k^x on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä ja sen arvojoukko on $]0, \infty[$, jokainen positiivinen luku voidaan ilmaista yksikäsitteisellä tavalla luvun k potenssina.
Lukua 0 ja negatiivisia lukuja ei voida ilmaista luvun k potensseina.

Logaritmin määritelmä

Positiivisen luvun x *k-kantainen logaritmi* on eksponentin arvo, kun luku x on ilmaistu luvun k potenssina:

$\log_k x = y$, jos ja vain jos $x = k^y$.

Määritelmän mukaan on siis

$x = k^{\log_k x}$.

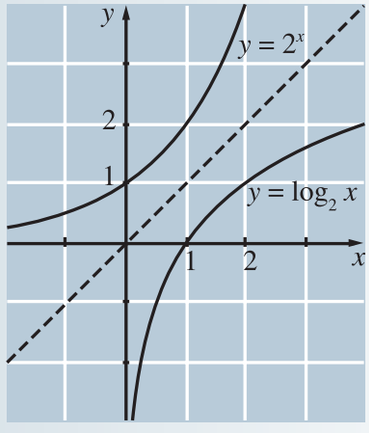
Esimerkiksi $\log_3 3^{17} = 17$, ja $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, sillä $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Yhtälön $\log_3 x = -1$ ratkaisu on $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Logaritmifunktion määrittely- ja arvojoukko

Funktion $\log_k x$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.
Funktion $\log_k x$ arvojoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Funktio $\log_k x$ on funktion k^x käänteisfunktio, joten funktioiden $\log_k x$ ja k^x kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.



10-kantainen logaritmi

Luvun x 10-kantainen logaritmi merkitään lyhyemmin $\lg x$.
Siis $\lg x = \log_{10} x$.

Esimerkiksi $\lg 0{,}001 = -3$, sillä $0{,}001 = 10^{-3}$.

Luonnollinen logaritmi

Luvun x e-kantaista logaritmia kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*.
Luvun x luonnollinen logaritmi merkitään $\ln x$. Siis $\ln x = \log_e x$.

Esimerkiksi $\ln e^5 = 5$ ja $\ln x = -2$, kun $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Yhtälö $e^x - 3 = 0$ toteutuu, kun $e^x = 3$ eli kun $x = \ln 3$.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $2e^{2x} + e^x - 1 = 0$.

Ratkaisu

Huomataan, että $e^{2x} = (e^x)^2$, ja merkitään $e^x = t$.

$2e^{2x} + e^x - 1 = 0$

$2t^2 + t - 1 = 0$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$t = -1$ tai $t = \frac{1}{2}$

Koska $t = e^x$, niin

$e^x = -1$ tai $e^x = \frac{1}{2}$.

Koska $-1 < 0$, yhtälöllä $e^x = -1$ ei ole juuria. Yhtälö $e^x = \frac{1}{2}$ toteutuu, kun

$x = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2$.

Vastaus

$x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

Harjoituksia

181. Määritä.

a) $\log_5 25$ b) $\log_5 5\sqrt{5}$ c) $\log_5 5$

d) $\log_5 1$ e) $\log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_5 \frac{1}{625}$

182. Määritä. a) $\lg 10^{1003}$ b) $\lg 0{,}00001$ c) $\ln e^3$ d) $\ln \frac{1}{e}$

183. Laske. a) $e^{\ln 7}$ b) $e^{-\ln 7}$ c) $5^{\log_5 13}$

184. Ratkaise x, kun a) $\log_2 x = 4$ b) $\ln x - 2 = 0$ c) $\ln (x - 2) = 0$.

185. Ratkaise kahden numeron tarkkuudella yhtälö $0{,}82 \lg x - 9{,}1 = 3{,}4$.

186. Ratkaise yhtälö.

a) $3e^x - 1 = 0$ b) $xe^x - 2x = 0$ c) $xe^x + 2e^x = 0$

187. Määritä kantaluku k, kun a) $\log_k 25 = 2$ b) $\log_k 2 = 25$.

Logaritmikaavat ja logaritmiyhtälöt

Logaritmikaavat

Seuraavat logaritmikaavat voidaan päätellä potenssikaavojen $(k^r)^s = k^{rs}$, $k^r \cdot k^s = k^{r+s}$ ja $\frac{k^r}{k^s} = k^{r-s}$ avulla.

Oletetaan, että $a > 0$ ja $b > 0$.

Potenssin logaritmikaava

$$\log_k a^s = s \cdot \log_k a$$

Tulon logaritmikaava

$$\log_k ab = \log_k a + \log_k b$$

Osamäärän logaritmikaava

$$\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$$

Esimerkiksi:

$$\ln x^3 = 3 \ln x \text{ ja } \ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x,$$

$$\log_6 60 - \log_6 5 + \log_6 3 = \log_6 \frac{60}{5} + \log_6 3$$

$$= \log_6 \frac{60 \cdot 3}{5} = \log_6 36 = 2.$$

Logaritmiyhtälöt Logaritmiyhtälöitä ratkaistaessa voidaan käyttää hyväksi logaritmikaavoja. Ennen kaavojen käyttöä on selvitettävä yhtälön määrittelyjoukko.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 5) = 3$.

Ratkaisu

Funktio $\log_2 (x - 3)$ on määritelty, kun $x - 3 > 0$ eli $x > 3$.
Funktio $\log_2 (x - 5)$ on määritelty, kun $x - 5 > 0$ eli $x > 5$.

Yhtälö on määritelty, kun $x > 5$.

Saatetaan yhtälö logaritmikaavojen ja logaritmin määritelmän avulla muotoon $\log_2 a = \log_2 b$.

$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 5) = 3$ Tulon logaritmikaava.

$\log_2 ((x - 3)(x - 5)) = 3$ $3 = \log_2 2^3$

$\log_2 ((x - 3)(x - 5)) = \log_2 2^3$

$(x - 3)(x - 5) = 2^3$

$x^2 - 8x + 15 = 8$

$x^2 - 8x + 7 = 0$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$x = 1$ tai $x = 7$

Luku 7 kuuluu määrittelyjoukkoon $]5, \infty[$. Yhtälön juuri on $x = 7$.

Vastaus $x = 7$

Harjoituksia

188. Ilmaise lauseke luvun x luonnollisen logaritmin $\ln x$ avulla.

a) $\ln x^5$ b) $\ln \sqrt{x}$ c) $\ln \frac{3x}{2}$ d) $\frac{\ln 3x}{2}$

189. Määritä luvun 43^{679} 10-kantainen logaritmi kahden desimaalin tarkkuudella. Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa 43^{679} on?

190. Laske lausekkeen $e^{2x} + e^{-x}$ arvo, kun $x = \ln 7$.

191. Määritä $\log_3 15 - \log_3 10 + \log_3 2$.

192. Määritä $\log_3 (4 + \sqrt{7}) + \log_3 (4 - \sqrt{7})$.

193. Sievennä lauseke $\log \frac{x^3}{y} - 2(\log x - \log \sqrt{y})$.

194. Ratkaise yhtälö $\lg x + \lg (x - 21) = 2$.

Eksponenttiyhtälö ja logaritmi

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$

Logaritmin määritelmän mukaan eksponenttiyhtälön

$k^x = a \quad (k > 0,\ k \neq 1 \text{ ja } a > 0)$

ratkaisu on luvun a k-kantainen logaritmi

$x = \log_k a$.

Ratkaisulle voidaan laskea likiarvo, kun ratkaisu ilmaistaan 10-kantaisen tai luonnollisen logaritmin avulla.

ESIMERKKI 4

Ilmaise $\log_3 7$ luonnollisen logaritmin avulla ja laske luvun likiarvo kolmen numeron tarkkuudella.

Ratkaisu

$\log_3 7$ on yhtälön $3^x = 7$ juuri.

$3^x = 7$	Vasemman ja oikean puolen luonnolliset logaritmit ovat yhtä suuret.
$\ln 3^x = \ln 7$	$\ln a^s = s \ln a$
$x \cdot \ln 3 = \ln 7$	$\mid : \ln 3$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}77$$

Vastaus

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}77$$

ESIMERKKI 5

Mistä n:n arvosta alkaen geometrisen jonon $a_n = 1{,}02^n \cdot 5$ jäsenet ovat suurempia kuin geometrisen jonon $b_n = 1{,}01^n \cdot 40$ jäsenet?

Ratkaisu Ratkaistaan epäyhtälö.

$$1{,}02^n \cdot 5 > 1{,}01^n \cdot 40 \qquad \big| : (5 \cdot 1{,}01^n) > 0$$

$$\frac{1{,}02^n}{1{,}01^n} > 8 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{1{,}02}{1{,}01}\right)^n > 8$$

$$\ln\left(\frac{1{,}02}{1{,}01}\right)^n > \ln 8$$

Funktio ln on aidosti kasvava, joten se säilyttää järjestyksen.

$$n \ln\frac{1{,}02}{1{,}01} > \ln 8 \qquad \big| : \ln\frac{1{,}02}{1{,}01} \approx 0{,}0099 > 0$$

$$n > \frac{\ln 8}{\ln\frac{1{,}02}{1{,}01}} \approx 211{,}06$$

Siis epäyhtälö $a_n > b_n$ pätee, kun $n \geqslant 212$.

Vastaus arvosta 212 alkaen

Harjoituksia

195. Ilmaise $\log_5 3$ luonnollisen logaritmin avulla ja laske luvun likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.

196. Ratkaise yhtälö $1{,}07^x a = 7{,}45a$ $(a \neq 0)$ kolmen numeron tarkkuudella.

197. Ratkaise epäyhtälö $0{,}95^x \cdot 5 < 2$.

Eksponentti- ja logaritmifunktion derivaatta

Eksponenttifunktion derivaatta

Eksponenttifunktio e^x on itse oma derivaattafunktionsa.

$$\boxed{\mathrm{D}e^x = e^x}$$

Yhdistetyn funktion derivointikaavalla $\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$ saadaan kaava

$$\boxed{\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x).}$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\,e^{-x^3} = e^{-x^3} \cdot \mathrm{D}(-x^3) = e^{-x^3} \cdot (-3x^2) = -3x^2 e^{-x^3}$

ja $\mathrm{D}\dfrac{1}{e^x} = \mathrm{D}e^{-x} = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$

Jokainen eksponenttifunktio k^x voidaan ilmaista funktion e^x avulla, sillä $k = e^{\ln k}$, joten $k^x = (e^{\ln k})^x = e^{x \ln k}$.

Siis

$\mathrm{D}k^x = \mathrm{D}e^{x \ln k} = e^{x \ln k} \cdot \ln k = k^x \ln k.$

Saadaan derivointikaava

$$\boxed{\mathrm{D}k^x = k^x \ln k.}$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\,3^x = 3^x \ln 3.$

Logaritmifunktion derivaatta

Funktion $\ln x$ derivaattafunktio on funktio $\frac{1}{x}$.

$$\boxed{\mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}} \quad (x > 0)$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\ln\frac{3}{x} = \mathrm{D}(\ln 3 - \ln x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$.

Yhdistetty funktio $\ln f(x)$ derivoidaan kaavalla

$$\boxed{\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}} \quad (f(x) > 0).$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\ln(x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

Harjoituksia

198. Derivoi funktio. a) e^{-6x} b) $\frac{1}{e^{5x^2}}$ c) $\sqrt{e^x}$

199. Määritä funktion derivaattafunktion nollakohdat.
a) $e^{2x} - 6x$ b) x^2e^{-x}

200. Derivoi funktio. a) $4\ln x$ b) $\ln 4x$ c) $\frac{\ln x}{5}$ d) $\ln\frac{x}{5}$

201. Derivoi funktio. a) $\ln(x^4 + 1)$ b) $\ln(e^{2x} + 1)$

202. Määritä funktion $x + x\ln x$ derivaattafunktion nollakohdat.

TEHTÄVIÄ

203. Laske lausekkeen $\log_k \dfrac{k^6\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}}$ $(k > 1)$ arvo. (Ylioppilaskoe, s. 1982)

204. Olkoon $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Laske $f(2 \ln 2)$ ja ratkaise yhtälö $f(x) = \dfrac{1}{6}$. (Ylioppilaskoe, k. 1990)

205. Erään viraston hallintokustannusten havaittiin olevan 45 % suuremmat kuin mitä normiksi oli määrätty. Jos hallintokustannuksia pienennetään 2,0 % joka vuosi, niin kuinka monen vuoden kuluttua kustannukset alittavat normitason?

206. Laske funktion $e^x + e^{-3x}$ tarkka arvo, kun $e^{2x} = 9$. (Ylioppilaskoe, k. 1993)

207. Ratkaise yhtälöt a) $(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$ ja b) $(e^x - 1)(e^x - 3) = 3$. (Ylioppilaskoe, k. 1984)

208. Millä x:n arvoilla on määritelty lauseke $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \lg(2-x) + \sqrt{5x + 3 - 2x^2}$?
(Ylioppilaskoe, k. 1997)

209. Tilille, jonka todellinen vuotuinen korko on 3,20 %, talletettiin 7 000 euroa. Toiselle tilille, jonka todellinen korko on 4,25 %, talletettiin samaan aikaan 5 000 euroa. Kuinka monessa vuodessa pienempi talletus kasvaa suuremmaksi kuin suurempi talletus?

210. Ratkaise epäyhtälö $\ln(2-x) + 1 < 0$.

211. Ratkaise epäyhtälö $e^x < e^{2x} - 2$ ja piirrä tilannetta valaiseva kuvio. (Ylioppilaskoe, k. 1996)

212. Valokuvausfilmin herkkyys ilmaistaan käyttäen kahta asteikkoa muodossa $S/S°$, esimerkiksi 100/21°. Ensimmäinen lukema S on filmin herkkyys fysikaalisella mitta-asteikolla (yksikkönä 1/luksisekunti), ja jälkimmäinen lukema $S°$ saadaan lukemasta S kaavalla $S° = 1 + 10 \lg S$.
a) Täydennä herkkyyskuvaukset 200/– ja –/36°. Ilmaise $S°$ kokonaislukuna ja S kahden numeron tarkkuudella.
b) Herkkyys ilmaistiin aikaisemmin niin sanotulla DIN-asteikolla, jonka lukema D muutetaan S-asteikkoon kaavalla $S = 25 \cdot 2^{\frac{D-15}{3}}$. Laadi likimääräinen muunnoskaava, jolla D voidaan muuttaa $S°$-asteikon lukemaksi. Määritä kaavan kertoimet viiden numeron tarkkuudella.

213. Ratkaise yhtälö
$\dfrac{1}{2}\log_3(7-x) = \log_3(x+3) + 1.$

214. Osoita, että
$2\log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \log_2(2 - \sqrt{3}) + 2.$

215. Radiumin määrä N_0 pienenee määrään N ajassa t kaavan $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ mukaisesti, missä λ on vakio. Radiumin puoliintumisaika on 1 580 vuotta. Kuinka kauan radiumin määrän pieneneminen kymmenesosaansa kestää?
(Ylioppilaskoe, k. 1992)

216. Yhtälössä $\ln y = \dfrac{x}{2} + 10^5$ muuttuja x kasvaa ykkösen verran. Kuinka monta prosenttia kasvaa tällöin y? (Ylioppilaskoe, k. 1991)

217. On annettu funktiot $f(x) = e^{2x}$ ja $g(x) = \ln x$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x^3)$. (Ylioppilaskoe, k. 1998)

218. Määritellään funktio f asettamalla

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}.$$

a) Mikä funktion f määrittelyjoukko on?
b) Osoita, että funktion f koko määrittelyjoukossa on $f(-x) = -f(x)$.
c) Ratkaise yhtälöt $f(x) = 2$ ja $f(x) = -2$. Anna juurten tarkat arvot ja kolmedesimaaliset likiarvot.

219. Derivoi funktio $f(x) = x^{-x}$, missä $x > 0$, ja määritä derivaattafunktion nollakohdat.

220. Tutki, kuinka yhtälön $e^{2x} - e^x + c = 0$ juurten lukumäärä riippuu vakion c arvosta.

221. Suuria alkulukuja etsitään yleensä muotoa $2^n - 1$ olevien lukujen joukosta. Suurin tunnettu alkuluku, joka ei ole tätä muotoa, on niin sanottu Prothin luku $19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586} + 1$.
a) Kuinka monta numeroa Prothin luvussa on, ja mitkä sen kaksi ensimmäistä numeroa ovat?
b) Osoita, että Prothin luku ei ole muotoa $2^n - 1$, n kokonaisluku.

222. Mitkä ehdot a:n ja b:n tulee täyttää, jotta sekä $\log_a b$ että $\log_b a$ olisivat määritellyt? Milloin on $\log_a b = \log_b a$?

223. a) Oletetaan, että $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ ja $ab \neq 1$. Osoita, että jos $x > 0$ ja $x \neq 1$, niin

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}.$$

b) Niin sanotun Stirlingin kaavan mukaan suurilla n:n arvoilla on $\frac{e^n}{n^n} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}$. Laske kaavan avulla yksidesimaalinen likiarvo summalle

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} + \ldots + \frac{1}{\log_{4999} \pi} + \frac{1}{\log_{5000} \pi}.$$

Trigonometriset funktiot

Sini, kosini ja tangentti

Terävän kulman sini, kosini ja tangentti

Terävän kulman sini, kosini ja tangentti määritellään suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina.

$$\sin\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$$

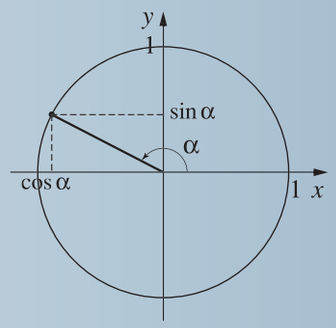
Sinin ja kosinin yleistys

Määritelmät yleistetään kaiken suuruisille suunnatuille kulmille yksikköympyrän avulla.

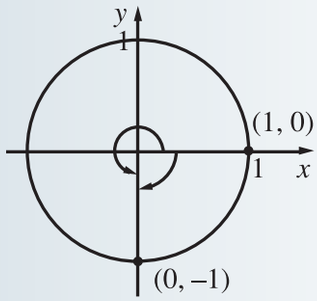
Suunnattu kulma α sijoitetaan koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja alkukylki on positiivisella x-akselilla.

Kulman α *kosini* on kulman α kehäpisteen x-koordinaatti.

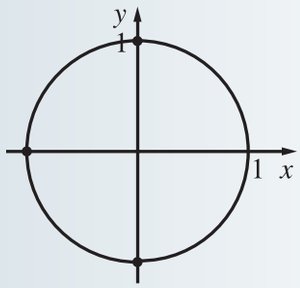
Kulman α *sini* on kulman α kehäpisteen y-koordinaatti.



Esimerkiksi $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$,
$\cos(-90°) = \cos 270° = 0$
ja $\sin(-90°) = \sin 270° = -1$.



$\cos \alpha = 0$, kun $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, ja
$\cos \alpha = -1$, kun $\alpha = 180° + n \cdot 360°$,
missä n on kokonaisluku.



Tangentin yleistys

Suunnatun kulman α tangentti on kulman α sini jaettuna kulman α kosinilla.

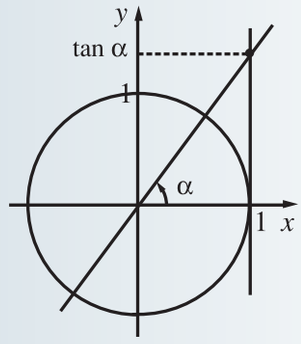
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Tangentti on määritelty, kun $\cos \alpha \neq 0$ eli kun $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.

Jos esimerkiksi $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ ja $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, niin

$$\tan \alpha = \frac{2}{5} : \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{21}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Tangentti voidaan määritellä myös yksikköympyrän avulla. Kulman α tangentti on kulman α tangenttipisteen y-koordinaatti.



Harjoituksia

224. Määritä kaikki kulmat α, joille
a) $\cos\alpha = 1$ b) $\cos\alpha = 0$ c) $\cos\alpha = -1$ d) $\sin\alpha - 1 = 0$.

225. Määritä kaikki kulmat α, joille
a) $\sin 3\alpha = 0$ b) $\cos 2\alpha = 1$.

226. Määritä
a) $\tan\alpha$, kun $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$
b) $\cos\alpha$, kun $\tan\alpha = -3$ ja $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

227. Määritä kaikki kulmat α, joille a) $\tan\alpha = 0$ b) $\tan 4\alpha = 0$.

Sinin, kosinin ja tangentin ominaisuuksia

Arvojoukot

Koska $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ ovat yksikköympyrän pisteen koordinaatteja, niin

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \quad \text{ja} \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Koska funktiot $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ saavat kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, funktioiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ arvojoukko on suljettu väli $[-1, 1]$.

Esimerkiksi funktion $3 + 5\cos\alpha$ suurin arvo on $3 + 5 \cdot 1 = 8$ ja pienin arvo $3 + 5 \cdot (-1) = -2$. Funktion arvojoukko on väli $[-2, 8]$.

Funktion $\tan\alpha$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Pythagoraan lause trigonometrisille funktioille

Yksikköympyrän jokaisen pisteen (x, y) koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 = 1$. Koska $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ ovat yksikköympyrän pisteen koordinaatit, niin

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

ESIMERKKI 1

Määritä $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kun $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ja $90° < \alpha < 180°$.

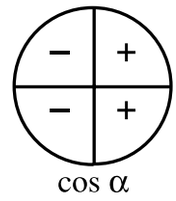
Ratkaisu

Tapa 1. Ratkaistaan ensin $\cos\alpha$ trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Koska $90° < \alpha < 180°$ eli α on koordinaatiston II neljänneksessä, $\cos\alpha$ on negatiivinen.



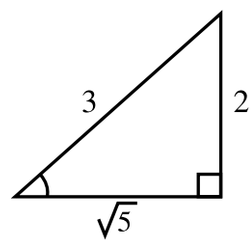
Siis

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{ja}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tapa 2. Lasketaan ensin sinin, kosinin ja tangentin itseisarvoilla.

Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka toisen terävän kulman sini on $\frac{2}{3}$. Vastaisen kateetin pituudeksi voidaan valita 2 ja hypotenuusan pituudeksi 3.

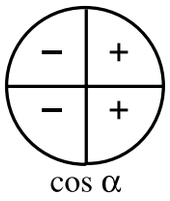


Toisen kateetin pituus on $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, ja saman terävän kulman kosini on $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja tangentti $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Kulman α kosinin itseisarvo on $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja tangentin itseisarvo $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Koska kulma α on II neljänneksessä, $\cos\alpha$ on negatiivinen. Siis

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$



Koska $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ ovat erimerkkiset, niin

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ on negatiivinen. Siis

$$\tan\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vastaus $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ja $\tan\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Harjoituksia

228. Määritä funktion $1 + 3\sin 2\alpha$ suurin arvo, pienin arvo ja arvojoukko.

229. Osoita, että $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

230. Määritä kulman α sini ja tangentti, kun $\cos\alpha = \dfrac{9}{41}$ ja $270° < \alpha < 360°$.

231. Määritä kulman α sini ja kosini, kun $\tan\alpha = 2$ ja $180° \leqslant \alpha \leqslant 360°$.

Kulman ratkaiseminen

Ratkaisujen olemassaolo ja lukumäärä

Koska funktioiden $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$, niin yhtälöillä

$\cos\alpha = a$ ja $\sin\alpha = a$

on ratkaisu silloin ja vain silloin, kun $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Tällöin yhtälöillä on äärettömän monta ratkaisua.

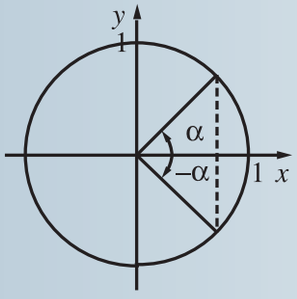
Koska funktion $\tan\alpha$ arvojoukko on $\mathbb{R}$, yhtälöllä

$\tan\alpha = a$

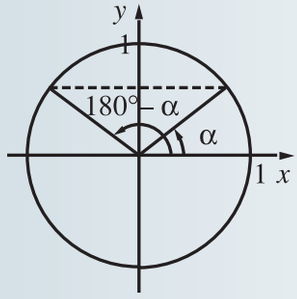
on kaikilla a:n arvoilla äärettömän monta ratkaisua.

Symmetriakaavat

Kun kulman loppukylki peilataan x- ja y-akselin suhteen, havaitaan symmetriakaavat kulman α vastakulmalle $-\alpha$ ja suplementtikulmalle $180° - \alpha$.



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$



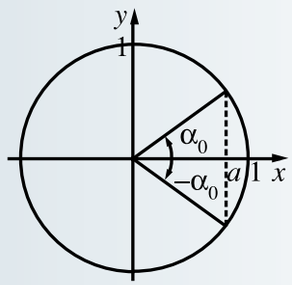
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

Yhtälöiden $\cos\alpha = a$ ja $\sin\alpha = a$ kaikki ratkaisut löydetään kaavojen $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ja $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ avulla.

Yhtälö $\cos\alpha = a$

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\cos\alpha = a$, niin yhtälön ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.

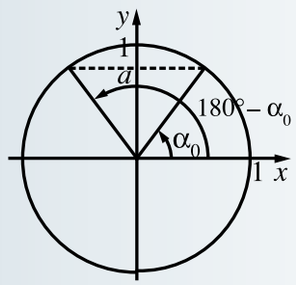


Esimerkiksi yhtälö $\cos\alpha = 0{,}6$ toteutuu, kun
$\alpha \approx 53° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx -53° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.

Yhtälö $\sin\alpha = a$

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\sin\alpha = a$, niin yhtälön ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai $\alpha = 180° - \alpha_0 + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku.



ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $2 \sin 2\alpha - 1 = 0$.

Ratkaisu

$2 \sin 2\alpha - 1 = 0$ Yhtälöstä ratkaistaan ensin $\sin 2\alpha$.

$2 \sin 2\alpha = 1 \quad | : 2$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ Yksi kulma, jonka sini on $\frac{1}{2}$, on $30°$.

$2\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $2\alpha = (180° - 30°) + n \cdot 360°$

$2\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $2\alpha = 150° + n \cdot 360° \quad | : 2$

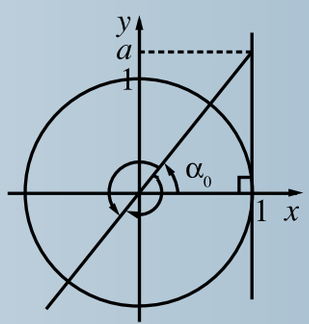
$\alpha = 15° + n \cdot 180°$ tai $\alpha = 75° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

Vastaus $\alpha = 15° + n \cdot 180°$ tai $\alpha = 75° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku

Yhtälö $\tan \alpha = a$

Tangentin arvot toistuvat $180°$:n välein.
Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön $\tan \alpha = a$, niin yhtälön ratkaisu on

$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.



Yhtälö $\tan \alpha = 1$ toteutuu,
kun $\alpha = 45° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku.

Harjoituksia

232. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $\sin \alpha + 1 = 2a$ on juuria?

233. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $\cos \alpha = -0{,}67$ b) $\sin \alpha = 0{,}49$ c) $\cos 2\alpha = 0{,}62$

234. Ratkaise yhtälö. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin 3\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

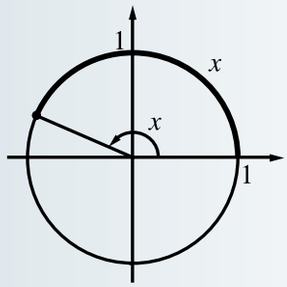
235. Ratkaise yhtälö $\tan 6\alpha = 1$.

Trigonometriset funktiot sin *x*, cos *x* ja tan *x*

Radiaani

Kun trigonometrisia funktioita tutkitaan differentiaalilaskennan keinoin (derivoidaan tai integroidaan), kulman suuruus ilmaistaan aina käyttäen yksikköä radiaani.

Positiivisen suunnatun kulman suuruus *radiaaneina* on kulmaa vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus. Negatiivisen suunnatun kulman suuruus radiaaneina on kaaren pituuden vastaluku.



Koska yksikköympyrän koko kehän pituus on $2\pi \cdot 1 = 2\pi$, niin täysikulman suuruus on 2π radiaania ja oikokulman suuruus π radiaania. Kun muunnetaan radiaaneja asteiksi tai päinvastoin, niin lähtökohtana voidaan käyttää oikokulmaa:

π radiaania on $180°$.

Jos esimerkiksi kulma on $-2{,}17$ radiaania, kulman suuruus asteina on $-2{,}17 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx -124°$, sillä 1 radiaani on $\frac{180°}{\pi}$.

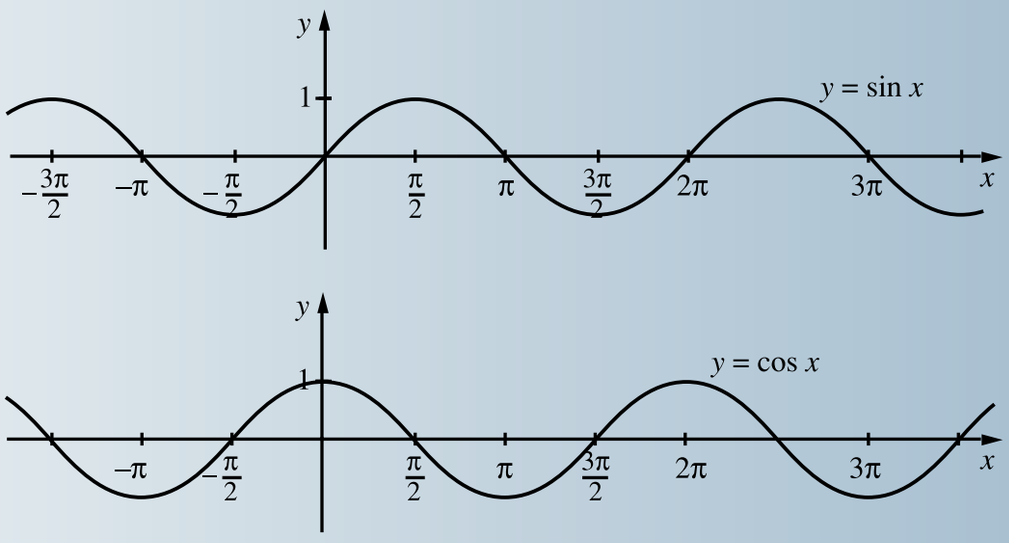
Jos kulma on $\frac{4\pi}{3}$ radiaania, kulman suuruus asteina on $\frac{4 \cdot 180°}{3} = 240°$.

Jos kulman suuruus on $75°$, kulman suuruus radiaaneina on $75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$, sillä $1°$ on $\frac{\pi}{180}$ radiaania.*

---

* Taulukkokirjassa on joitakin välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ (välin $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) kulmia sekä asteina että radiaaneina. Tärkeitä kulmia ovat erityisesti $30°$:n kulman (kulma $\frac{\pi}{6}$) ja $45°$:n kulman (kulma $\frac{\pi}{4}$) monikerrat, sillä näiden kulmien sinit, kosinit ja tangentit on tapana ilmaista tarkkoina arvoina.

Funktiot sin *x* ja cos *x*



Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat määritellyt kaikilla muuttujan arvoilla, ja ne ovat jatkuvia kaikkialla.

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$.

Esimerkiksi funktion $f(x) = 7 \sin 2x - 3$ suurin arvo on $7 \cdot 1 - 3 = 4$ ja pienin arvo $7 \cdot (-1) - 3 = -10$.

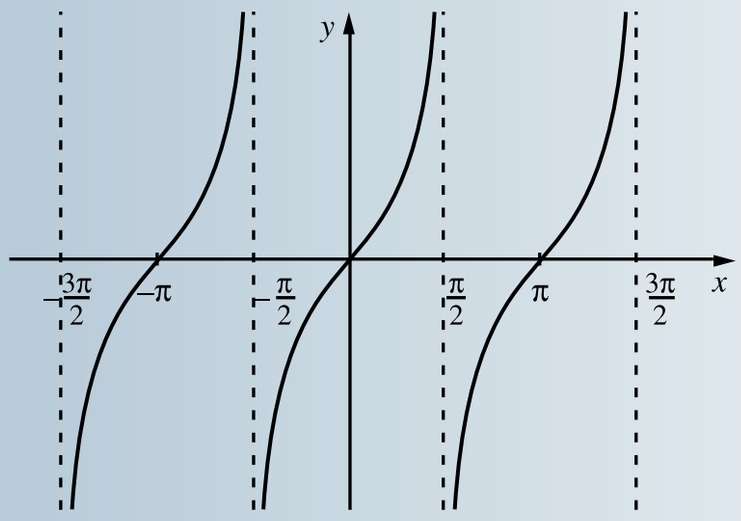
Funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ jakso on 2π.

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Funktioiden $\cos kx$ ja $\sin kx$ jakso on $\frac{2\pi}{k}$.

Esimerkiksi funktion $f(x) = \sin 3x$ jakso on $\frac{2\pi}{3}$.

Funktio tan *x*



Funktio $\tan x$ on määritelty, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

Funktion $\tan x$ arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Funktion $\tan x$ jakso on π.

$$\tan (x + \pi) = \tan x$$

Harjoituksia

236. Ilmaise kulman suuruus asteina neljän numeron tarkkuudella.
a) $-0{,}7361$ b) $1{,}948$

237. Ilmaise kulman suuruus asteina (tarkka arvo).
a) $\frac{5\pi}{3}$ b) $-\frac{11\pi}{12}$

238. Ilmaise kulman suuruus radiaaneina (tarkka arvo).
a) $-270°$ b) $135°$ c) $30°$ d) $210°$

239. Millä muuttujan x arvoilla on
a) $\sin x + 1 = 0$ b) $\sin 3x = 0$ c) $\sin 2x - 1 = 0$?

240. Mikä funktion $\sqrt{5 - 4\cos x}$ määrittelyjoukko on? Määritä funktion suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja missä kohdissa pienimmän arvonsa?

241. Määritä funktion $f(x) = 3 \sin 4x$ jakso ja arvojoukko.

242. Määritä funktion $f(x) = 3 - 2\cos^2 \frac{x}{2}$ suurin ja pienin arvo.

243. Millä muuttujan arvoilla funktio $\tan 3x$ on määritelty?

244. Määritä $\cos x$ ja $\tan x$, kun $\sin x = -\frac{1}{3}$ ja $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$.

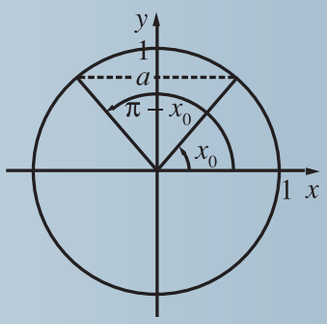
245. Osoita, että $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Trigonometrisia yhtälöitä

Yhtälö $\sin x = a$

Yhtälöllä $\sin x = a$ on ratkaisu, jos ja vain jos $-1 \leqslant a \leqslant 1$.
Jos x_0 on yksi yhtälön ratkaisu, niin yhtälö toteutuu, kun

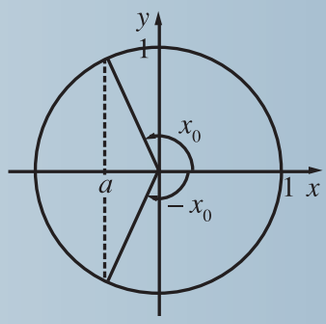
$x = x_0 + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - x_0 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku.



Yhtälö $\cos x = a$

Yhtälöllä $\cos x = a$ on ratkaisu, jos ja vain jos $-1 \leqslant a \leqslant 1$.
Jos x_0 on yksi yhtälön ratkaisu, niin yhtälö toteutuu, kun

$x = x_0 + n \cdot 2\pi$ tai $x = -x_0 + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku.



Esimerkiksi yhtälö $2\cos 3x + 1 = 0$ voidaan saattaa muotoon $\cos 3x = -\frac{1}{2}$. Yksi kulma, jonka kosini on $-\frac{1}{2}$, on $\frac{4\pi}{3}$.
Yhtälö toteutuu, kun

$3x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $3x = -\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ eli kun

$x = \frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = -\frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku.

Yhtälö $\tan x = a$

Yhtälöllä $\tan x = a$ on ratkaisu kaikilla a:n arvoilla. Jos x_0 on yksi yhtälön ratkaisu, niin yhtälön täydellinen ratkaisu on

$x = x_0 + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

Yhtälön $\tan x = -1$ yksi ratkaisu on $\frac{3\pi}{4}$. Yhtälö toteutuu, kun

$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $\sin 3x = \sin 2x$.

Ratkaisu

Kulmalla $3x$ on sama sini kuin kulmalla $2x$, jos ja vain jos kulma $3x$ saadaan lisäämällä 2π:n monikerta kulmaan $2x$ tai kulman $2x$ suplementtikulmaan $\pi - 2x$.

$\sin 3x = \sin 2x$

$3x = 2x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = \pi - 2x + n \cdot 2\pi$ Ratkaistaan yhtälöistä x.

$x = n \cdot 2\pi$ tai $5x = \pi + n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$

Vastaus

$x = n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$, n kokonaisluku

ESIMERKKI 4

Määritä kolmen desimaalin tarkkuudella funktion $\sin^3 x - 2\cos^3 x$ välillä $[0, 2\pi]$ olevat nollakohdat.

Ratkaisu

$\sin^3 x - 2\cos^3 x = 0$

$\sin^3 x = 2\cos^3 x \qquad | : \cos^3 x \neq 0$

Yhtälö ei toteudu, jos $\cos x = 0$, sillä tällöin on $\sin x = 1$ tai $\sin x = -1$.

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 2$$

$$\tan^3 x = 2$$

$\tan x = \sqrt[3]{2}$ Yksi yhtälön juuri on $x_0 \approx 0{,}89991$.

$x \approx 0{,}89991 + n \cdot \pi$

Koska $2\pi \approx 6{,}28$, yhtälön välillä $[0, 2\pi]$ olevat juuret ovat $0{,}89991 \approx 0{,}900$ ja $0{,}89991 + 1 \cdot \pi \approx 4{,}042$.

Vastaus 0,900 ja 4,042

Harjoituksia

246. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $a + \sin x = 4$ on ratkaisuja?

247. Määritä kolmen desimaalin tarkkuudella yhtälön välillä $[0, 2\pi]$ olevat juuret. a) $\sin x = 0{,}789$ b) $\cos x = 0{,}295$

248. Ratkaise yhtälö.

a) $2\sin x - 1 = 0$ b) $2\cos 2x = \sqrt{3}$

249. Ratkaise yhtälö $2\sin x \cos x + \sin x = 0$.

Trigonometristen funktioiden derivaatat

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ derivaattafunktiot ovat

$$\mathrm{D}\sin x = \cos x$$
$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x.$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\cos^3 x = 3\cos^2 x \cdot \mathrm{D}(\cos x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$
$= -3\sin x \cos^2 x.$

Yhdistettyjen funktioiden $\sin f(x)$ ja $\cos f(x)$ derivaattafunktiot ovat

$$\mathrm{D}\sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$
$$\mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x).$$

Esimerkiksi $\mathrm{D}\cos 3x = -\sin 3x \cdot 3 = -3\sin 3x.$

Funktion $\tan x$ derivaattafunktio on

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Harjoituksia

250. Derivoi funktio. a) $\sin 3x + 5\sin x$ b) $\cos 2x - \cos^2 x$

251. Laske $f'(\frac{\pi}{2})$, kun $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

252. Määritä funktion $f(x) = \sin 4x - 2x$ derivaattafunktion nollakohdat.

TEHTÄVIÄ

253. Kolmion kulmat ovat x, $2x$ ja $3x$. Laske lausekkeen $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2$ tarkka arvo. (Ylioppilaskoe, k. 1990)

254. Määritä x, kun $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ja $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. (Ylioppilaskoe, k. 1983)

255. Määritä $\sin x$ ja $\cos x$, kun $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ ja $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

256. Kaksinkertaisen kulman sinille pätee kaava $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Laske $\sin 2\alpha$, kun $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ja $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

257. Määritä funktion $f(x) = \frac{5}{4 + 3\cos 2x}$ suurin ja pienin arvo reaalilukujen joukossa. Millä argumentin arvoilla nämä saadaan?
(Ylioppilaskoe, k. 2001)

258. Ratkaise yhtälö $\sin x = 2 \sin^2 x$.
(Ylioppilaskoe, s. 1988)

259. Ratkaise yhtälö $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$.
(Ylioppilaskoe, k. 1994)

260. Ratkaise yhtälö $2 \cos (x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0$.
(Ylioppilaskoe, k. 1980)

261. Ratkaise yhtälö $(\sin x + \sqrt{3})^2 = \frac{27}{4}$.
(Ylioppilaskoe, k. 1987)

262. Ratkaise yhtälö $\cos 3x = \cos 2x$.

263. Määritä ne reaaliluvut x, joilla funktion $\cos (\frac{\pi}{2} - x)$ derivaatta on $\sin x$.
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

264. Ratkaise yhtälö $\cos^3 x = 3\sqrt{3} \sin^3 x$.

265. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $a^2 \sin x + \sin x + 1 = 2a$ on juuria?

266. Ratkaise yhtälö $\cos^2 x = \sin x + \frac{1}{4}$.

267. Mikä funktion $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ määrittelyjoukko on? Osoita, että funktion f koko määrittelyjoukossa on $f'(x) \cos x = f(x)$.

268. Osoita, että
$\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

269. Määritä yhtälön $\sin e^x = 0$ pienin ja suurin välillä $[10, 13]$ oleva juuri. Kuinka monta juurta yhtälöllä $\sin e^x = 0$ on välillä $[10, 13]$?

270. Määritä kaikki funktion
$f : f(x) = \cos \frac{1 - x}{x}$ derivaatan välillä $]-1, 1[$ olevat nollakohdat. (Ylioppilaskoe, k. 1987)

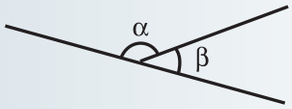
271. Määritä kaikki luvut, jotka jollain vakion a arvolla ovat yhtälön
$16x^2 + 24x \cos a = 16 + 9 \sin^2 a$ juuria.

272. Kolminkertaisen kulman kosinille pätee kaava $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$. Ratkaise kolmannen asteen yhtälö $x^3 - 3x + 1 = 0$ sijoittamalla $x = 2t$ ja käyttämällä kolminkertaisen kulman kosinin kaavaa. Anna vastaukseksi yhtälön juurten tarkat arvot (muodossa, jossa voi esiintyä trigonometrinen funktio) ja neljädesimaaliset likiarvot.

Tasogeometria

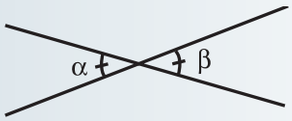
Kulmalauseita

Vieruskulmalause. Vieruskulmien summa on oikokulma.



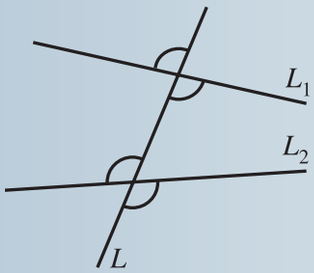
$\alpha + \beta = 180°$

Ristikulmalause. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

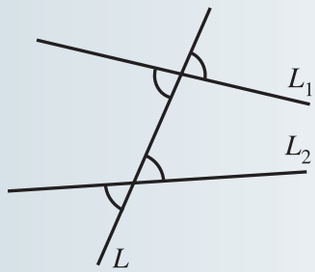


$\alpha = \beta$

Kun suora L leikkaa kahta muuta suoraa L_1 ja L_2, niin kulmat, joiden samanniminen kylki (molemmilla oikea kylki tai molemmilla vasen kylki) on suoralla L, ovat keskenään *samankohtaiset*.



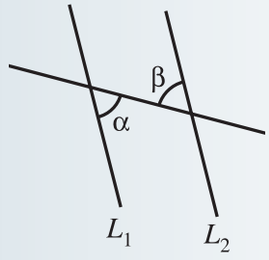
Oikea kylki on suoralla L.



Vasen kylki on suoralla L.

Samankohtaisten kulmien lause. Kaksi suoraa ovat keskenään yhdensuuntaiset, jos ja vain jos samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat, kun kolmas suora leikkaa niitä molempia, ovat yhtä suuret.

Esimerkiksi suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos kulmat α ja β ovat yhtä suuret.



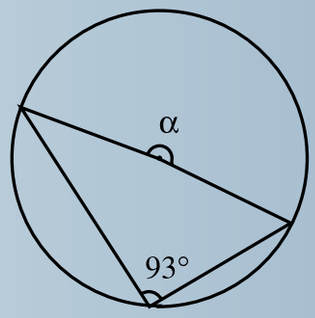
Kolmion kulmien summalause. Kolmion kulmien summa on oikokulma.

Nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi, viisikulmio kolmeksi kolmioksi jne. Yleisesti n-kulmio voidaan jakaa $n - 2$ kolmioksi. Saadaan:

Monikulmion kulmien summa. n-kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$.

Kehäkulmalause. Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

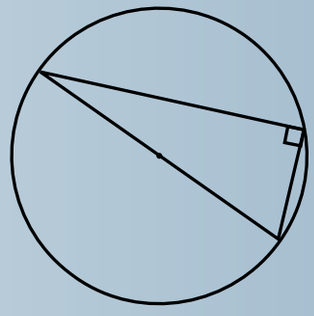
Esimerkiksi kuvion kehäkulma $93°$ on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta α. Siis $\alpha = 2 \cdot 93° = 186°$.



Kehäkulmalauseesta seuraa välittömästi:

Lause. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

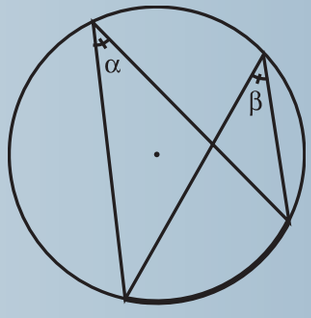
Lauseesta seuraa, että suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän (kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän) keskipiste on hypotenuusan keskipiste.



Jokainen samaa kaarta vastaava kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta. Siis pätee:

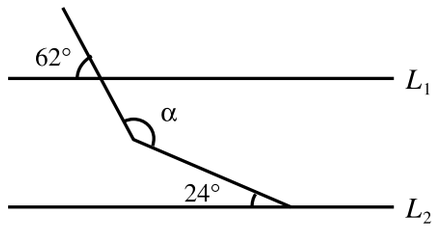
Lause. Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

Esimerkiksi viereisessä kuviossa on $\alpha = \beta$.



Harjoituksia

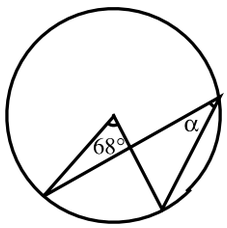
273. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuri kulma α on?



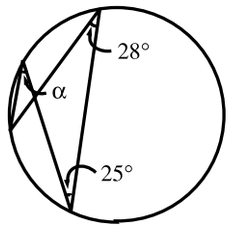
274. Kolmion yhden kulman suuruus on $72°$. Kuinka suuri kahden muun kulman puolittajien välinen terävä kulma on?

275. Kuinka suuri kulma α on?

a)

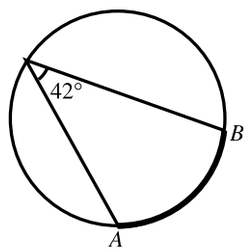


b)



276. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5 ja 12. Kuinka pitkä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on?

277. Ympyrän säde on $5{,}2$ cm. Kuinka pitkä pisteitä A ja B yhdistävä kaari on?



Yhdenmuotoiset kuviot

Yhdenmuotoisuus

Kuviot, jotka saadaan toisistaan siirtämällä, kiertämällä, peilaamalla, suurentamalla tai pienentämällä ovat *yhdenmuotoiset*.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa kulma ja sen vastinkulma ovat yhtä suuret.

Kun yhdenmuotoisissa kuvioissa muodostetaan mikä tahansa suhde $\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}}$, niin suhde on aina yhtä suuri.

Suhde on *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava*.

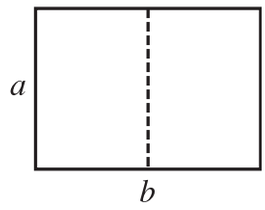
Yhdenmuotoisten kuvioiden osia voidaan ratkaista verrantoyhtälön avulla.

ESIMERKKI 1

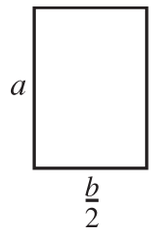
Kaikki A-sarjan (A0, A1, A2, ...) paperiarkit ovat keskenään yhdenmuotoiset, ja ne saadaan toisistaan seuraavasti: kun arkki An leikataan lyhyemmän sivun suuntaisesti kahteen yhtä suuren osaan, saadaan kaksi An + 1 -arkkia. Mikä A-sarjan arkkien sivujen suhde on?

Ratkaisu

Olkoon A-sarjan arkin lyhyempi sivu a ja pitempi sivu b.



Kun arkki leikataan keskeltä, saadaan arkki, jonka sivujen pituudet ovat $\frac{b}{2}$ ja a.



Koska arkit ovat yhdenmuotoiset, niin

$\frac{b}{2} : a = \frac{a}{b}$ Lyhyempien sivujen suhde on yhtä suuri kuin pitempien sivujen suhde.

$\frac{b}{2a} = \frac{a}{b}$ Kerrotaan ristiin.

$b^2 = 2a^2$

$b = (\pm)\sqrt{2}\,a.$

Sivujen pituuksien suhde on $a : \sqrt{2}\,a = 1 : \sqrt{2}$.

Vastaus

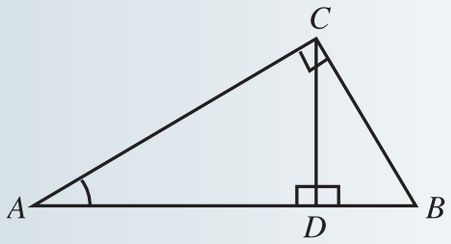
$1 : \sqrt{2}$

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Jos kahden kolmion kulmat ovat pareittain yhtä suuret, kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kolmion kulmien summa on oikokulma, niin jo kahden kulmaparin yhtäsuuruus takaa kolmioiden yhdenmuotoisuuden.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk). Jos kolmion kahta kulmaa vastaavat yhtä suuret kulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Kuviossa kolmiolla ACD ja koko kolmiolla ABC on yhteinen kulma A ja kummassakin kolmiossa on suora kulma, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk). Samoin nähdään, että myös kolmio CBD on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa. Siten myös kolmiot ACD ja CDB ovat keskenään yhdenmuotoiset.



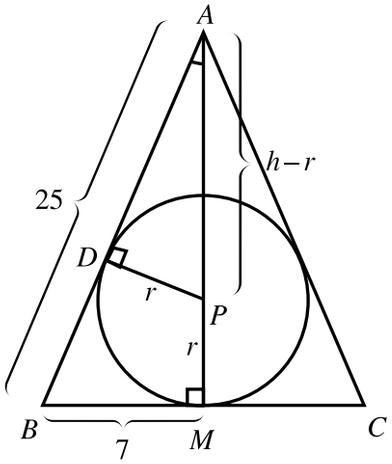
ESIMERKKI 2

Tasakylkisen kolmion kanta on 14 ja kylki 25. Kuinka pitkä kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on?

Ratkaisu

Sanonta *kolmion sisään piirretty ympyrä* tarkoittaa ympyrää, joka sivuaa kolmion kaikkia sivuja.

Kolmioilla ABM ja APD on yhteinen kulma ja molemmissa kolmioissa on suora kulma, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk). Ympyrän säde voidaan ratkaista verrantoyhtälöstä $\frac{r}{7} = \frac{h-r}{25}$, kun ensin ratkaistaan kolmion korkeus h.



$h^2 + 7^2 = 25^2$ Pythagoraan lause

$h^2 = 576$

$h = \sqrt{576} = 24$

Siis:

$\frac{r}{7} = \frac{24 - r}{25}$ Kerrotaan ristiin.

$25r = 7(24 - r)$ Ratkaistaan yhtälö.

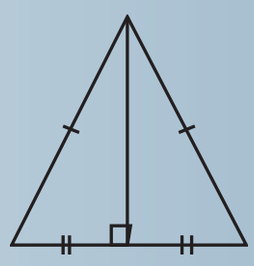
$r = 5\frac{1}{4}$.

Vastaus $5\frac{1}{4}$

Yhtenevät kuviot

Kuviot, jotka ovat yhdenmuotoiset suhteessa 1 : 1 eli yhdenmuotoiset ja yhtä suuret, ovat *yhtenevät*. Yhtenevissä kuvioissa kulma ja vastinkulma ovat yhtä suuret ja jana ja vastinjana ovat yhtä pitkät.

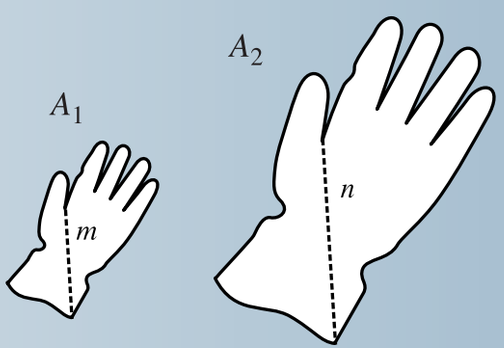
Esimerkiksi tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahteen keskenään yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



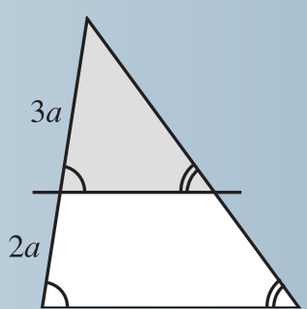
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$



Jos piirretään kolmion yhden sivun suuntainen suora, joka jakaa toisen sivun vastaisesta kärjestä lukien suhteessa 3 : 2, niin erottuva kolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa (samankohtaiset kulmat ja yhteinen kulma). Erottuvan kolmion pinta-alan suhde koko kolmion pinta-alaan on $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.



Kolmio jakautuu osiin, joiden pinta-alojen suhde on 9 : 16.

Harjoituksia

278. Suorakulmion muotoisen paperiarkin sivut ovat 12 cm ja 40 cm. Arkki halutaan leikata lyhyemmän sivun suuntaisesti kahteen erikokoiseen keskenään yhdenmuotoiseen osaan. Mistä kohdasta arkki leikataan?

279. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 10 ja kyljen pituus 13. Kolmioon on piirretty neliö, jonka yksi sivu on kolmion kannalla ja kaksi kärkeä kolmion kyljillä. Kuinka pitkä neliön sivu on?

280. Yhdenmuotoisten säilyketölkkien korkeudet ovat $7{,}8$ cm ja $11{,}7$ cm. Kuinka monta prosenttia vähemmän peltiä tarvitaan pienempään tölkkiin?

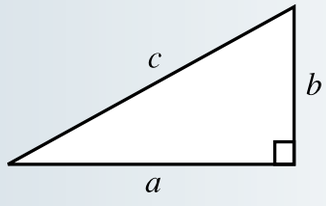
281. Kolmion pinta-ala on $150\ \text{cm}^2$. Yhden sivun suuntainen suora jakaa toisen sivun sivujen yhteisestä kärjestä lukien suhteessa $2 : 3$. Mikä muodostuvan puolisuunnikkaan pinta-ala on?

282. Yhdenmuotoisten arkkien A4 ja A5 alojen suhde on $100 : 50$. Kirjoitusta sisältävä A4-kokoinen arkki pienennetään kokoon A5. Kuinka monta prosenttia tekstin korkeus tällöin pienenee? (Ylioppilaskoe, k. 1992)

Pythagoraan lause

Pythagoraan lause. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Kääntäen pätee:

Pythagoraan lauseen käänteislause. Jos kolmion sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön $c^2 = a^2 + b^2$, niin sivujen a ja b välinen kulma on suorakulma.

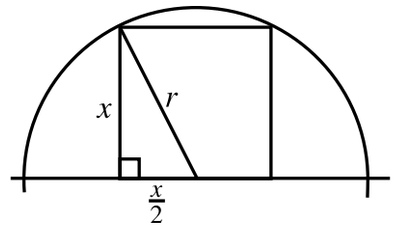
Esimerkiksi kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 6, 7 ja $\sqrt{13}$, on suorakulmainen, sillä $6^2 + (\sqrt{13})^2 = 49 = 7^2$. Kolmion kateettien pituudet ovat 6 ja $\sqrt{13}$ ja hypotenuusan pituus on 7.

ESIMERKKI 3

Puoliympyrän sisään on piirretty neliö, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja kaksi kärkeä kehällä. Laske neliön pinta-alan suhde puoliympyrän pinta-alaan.

Ratkaisu

Merkitään ympyrän sädettä r. Ratkaistaan neliön sivu x.



$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 \qquad \text{Pythagoraan lause}$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = r^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 = r^2 \qquad | \cdot \frac{4}{5}$$

$$x^2 = \frac{4}{5}r^2$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}r$$

Neliön pinta-ala on $A_N = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}r\right)^2 = \frac{4}{5}r^2$, ja puoliympyrän pinta-ala on $A_P = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_N}{A_P} = \frac{4}{5}r^2 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4r^2}{5} \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{8}{5\pi}.$$

Vastaus

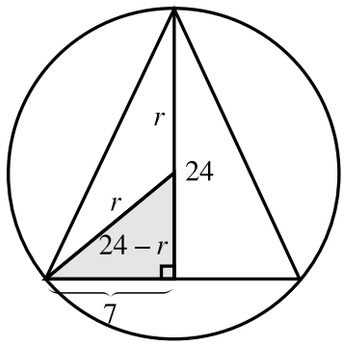
$\frac{8}{5\pi} \approx 0{,}51$

ESIMERKKI 4

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 14 ja kannalle piirretty korkeus 24. Kuinka pitkä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on?

Ratkaisu

Sanonta *kolmion ympäri piirretty ympyrä* tarkoittaa ympyrää, joka kulkee kolmion jokaisen kärjen kautta.



Ympyrän säde r voidaan ratkaista kuvion suorakulmaisesta kolmiosta.

$r^2 = 7^2 + (24 - r)^2$ Pythagoraan lause

$r^2 = 49 + 576 - 48r + r^2$

$48r = 625$ $\quad | : 48$

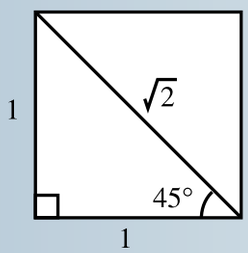
$r = \frac{625}{48} = 13\frac{1}{48}$

Vastaus

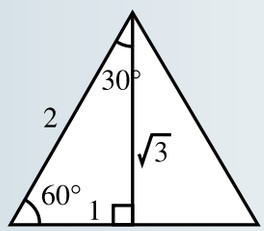
$13\frac{1}{48}$

Muistikolmiot

Pythagoraan lauseen toistuvaa käyttöä voi joskus välttää käyttämällä hyväksi niin sanottuja muistikolmioita, joista voidaan lukea tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ja tasasivuisen kolmion puolikkaan sivujen suhteita.*



neliön puolikas



tasasivuisen kolmion puolikas

Jos esimerkiksi neliön sivun pituus on a, niin neliön lävistäjän pituus on $\sqrt{2}\,a$. Jos neliön lävistäjän pituus on d, niin neliön sivun pituus on $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

---

* Kolmioista nähdään myös suoraan 45°:n, 30°:n ja 60°:n kulman sinin, kosinin ja tangentin tarkat arvot. Esimerkiksi $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Harjoituksia

283. Tasasivuisen kolmion kylkien pituus on $4a$. Laske kolmion
a) korkeus b) pinta-ala.

284. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kannan pituus on a.
Määritä kolmion a) kylkien pituus b) pinta-ala.

285. Tasakylkisen kolmion kanta on $3a$ ja kylki $2a$. Laske huipusta kannalle piirretyn korkeusjanan pituus ja kolmion pinta-ala.

286. Kuinka kauas merelle näkee rantatörmältä 12 metrin korkeudelta? Laske suoraviivainen etäisyys katsojan silmistä näkökentän etäisimpään kohtaan. Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

287. Ympyrällä on segmentti, jota rajaa 22 cm pitkä jänne ja jonka jännettä vastaan kohtisuoraan mitattu korkeus on 6,0 cm. Kuinka pitkä ympyrän säde on?

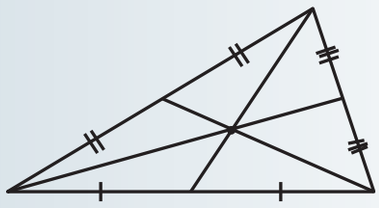
288. Laske ympyrän sisään piirretyn neliön pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan.

289. Kolmion sivujen pituudet ovat $\sqrt{3}-1$, $2\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}+1$. Onko kolmio suorakulmainen?

Kolmiolauseita

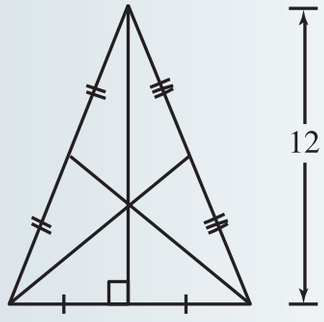
Seuraavat kolme kolmiolausetta ovat taulukkokirjoissa.

Keskijanalause. Kolmion sivujen keskijanat (mediaanit) leikkaavat samassa pisteessä. Leikkauspiste jakaa keskijanat sivusta lukien suhteessa $1 : 2$. Leikkauspiste on kolmion *painopiste*.

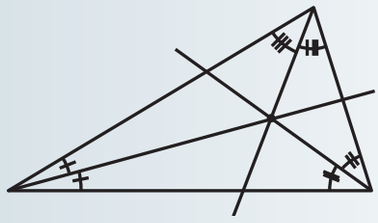


Tasakylkisessä kolmiossa huipusta kannalle piirretty korkeusjana on myös kolmion mediaani. Koska painopiste jakaa keskijanan sivusta lukien suhteessa $1 : 2$, niin kuvion tasakylkisessä kolmiossa painopiste on korkeusjanan piste, jonka etäisyys kannasta on

$$\frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

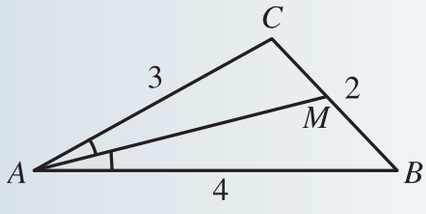


Kulmanpuolittajalause. Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat samassa pisteessä. Leikkauspiste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.* Lisäksi kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.



Esimerkiksi kuvion kolmiossa ABC kulman A puolittaja AM jakaa vastaisen sivun BC viereisten sivujen suhteessa $4 : 3$. Osien pituudet ovat

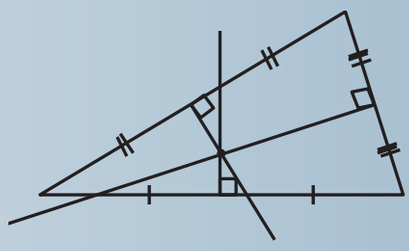
$$BM = \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{8}{7} \quad \text{ja} \quad CM = \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}.$$



---

* Tämä johtuu siitä, että yleisesti kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman kyljistä. Siten kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste on yhtä etäällä jokaisesta kolmion sivusta ja siis kaikkia sivuja sivuavan ympyrän keskipiste.

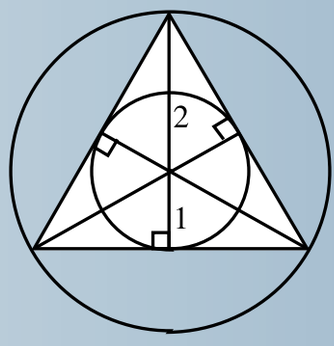
Keskinormaalilause. Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä. Piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.*



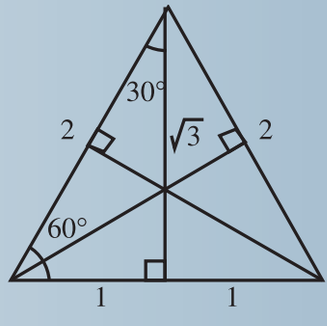
Kolmion sivujen keskijanojen leikkauspiste, kulmien puolittajien leikkauspiste ja keskinormaalien leikkauspiste ovat kolmion kolme *merkillistä pistettä.***

Tasasivuisen kolmion keskipiste

Tasasivuisessa kolmiossa keskijanat ovat samalla kulmien puolittajia ja sivujen keskinormaaleja. Janojen leikkauspiste on sekä kolmion sisään että ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja piste jakaa janat kolmion sivuista lukien suhteessa 1 : 2.



Esimerkiksi kuvion tasasivuisessa kolmiossa (muistikolmiossa) keskipisteen etäisyys kannasta on $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ja kärjestä $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Ensimmäinen etäisyys on kolmion sisään piirretyn ympyrän säde ja jälkimmäinen etäisyys kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.



---

* Tämä johtuu siitä, että yleisesti janan keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä. Siten kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste on yhtä etäällä jokaisesta kolmion kärjestä ja siis kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän keskipiste.

** Merkillisiä pisteitä on muitakin, muun muassa kolmion korkeusjanojen (tai niiden jatkeiden) leikkauspiste.

Harjoituksia

290. Tasakylkisen kolmion huipusta kannalle piirretty korkeus on 18. Missä kolmion painopiste sijaitsee?

291. Kolmiossa ABC on $AB = 5$, $AC = 7$ ja $BC = 4$. Kulman A puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä P. Kuinka pitkät janat BP ja CP ovat?

292. Tasasivuisen kolmion sivujen pituus on $5a$. Laske a) kolmion sisään piirretyn ympyrän säde b) kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

Suorakulmaisen kolmion trigonometria

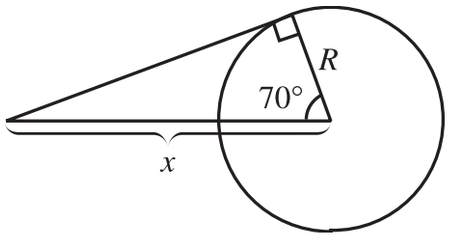
Jos tunnetaan suorakulmaisen kolmion yksi terävä kulma ja yksi sivu, niin muut sivut voidaan ratkaista trigonometristen suhteiden sini, kosini ja tangentti avulla. Samoin suhteiden avulla voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion kulmat, jos tunnetaan kolmion kaksi sivua.

ESIMERKKI 5

Kuinka korkealle päiväntasaajan yläpuolelle tulee vähintään nousta, jotta voitaisiin nähdä 70. pohjoiselle leveyspiirille? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

Ratkaisu

Näkökenttä ulottuu etäisimmillään pisteeseen, jossa maapallon isoympyrälle piirretty tangentti sivuaa ympyrää.



Olkoon x tarvittava vähimmäisetäisyys maapallon keskipisteestä.

Maapallon säde on

$$R = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6\,366{,}2 \text{ (km)}.$$

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan:

$$\cos 70° = \frac{R}{x} \qquad \big| \cdot x$$

$$x \cos 70° = R \qquad \big| : \cos 70°$$

$$x = \frac{R}{\cos 70°}.$$

Korkeuden tulee olla vähintään

$$\frac{R}{\cos 70°} - R \approx 12\,000 \text{ (km)}.$$

Lausekkeeseen voidaan näppäillä laskimessa oleva R:n arvo [Ans] -näppäimellä.

Vastaus 12 000 km:n korkeudelle

Harjoituksia

293. Kolmion sivujen pituudet ovat 6, 6 ja 8. Määritä kolmion pienimmän kulman sini ja suurimman kulman puolikkaan kosini. (Ylioppilaskoe, k. 1998)

294. Tasamaalla kasvavan pystysuoran puun varjon pituus on 37 metriä, kun aurinko näkyy 28°:n kulmassa horisontin yläpuolella. Mikä on puun pituus? (Ylioppilaskoe, s. 1999)

295. Laiva, jonka pituus on 218 metriä, näkyy suoraan sivusta katsottuna 3,4°:n kulmassa. Kuinka kaukana laiva on katsojasta?

296. Ympyrälle, jonka kehän pituus on 48 cm, on piirretty 15 cm pitkä kaari. Kuinka pitkä kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne on?

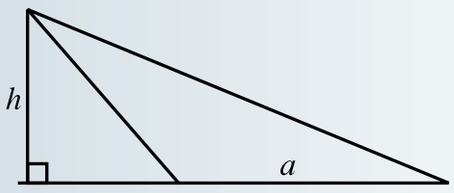
297. Suorakulmion sivujen pituuksien suhde on 1 : 3. Laske suorakulmion lävistäjien välisen terävän kulman suuruus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava ja sinilause

Kolmion pinta-ala

Kolmion pinta-ala on puolet yhden sivun pituuden ja sivulle tai sen jatkeelle piirretyn korkeuden tulosta.

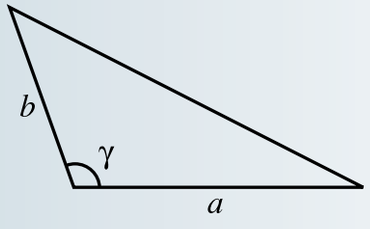
$$A = \frac{1}{2}ah$$



Yleisesti pätee myös

Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava. Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua ja γ näiden sivujen välinen kulma, niin

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.^*$$



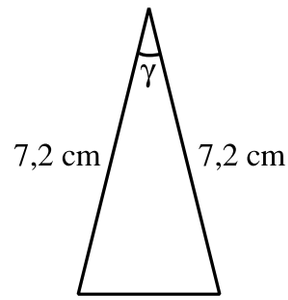
* Koska kolmion pinta-ala on puolet suunnikkaan pinta-alasta, niin vastaavasti suunnikkaan pinta-ala voidaan laskea kaavalla $A = ab\sin\gamma$. Tämä kaava, samoin kuin kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava, on taulukkokirjassa.

ESIMERKKI 6

Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 7,2 cm ja kolmion pinta-ala on 12 cm^2. Kuinka suuri kolmion huippukulma on?

Ratkaisu

Kolmion pinta-alan trigonometrisen kaavan mukaan kolmion pinta-ala on



$A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}2 \cdot 7{,}2 \cdot \sin\gamma$, joten

$$\frac{1}{2} \cdot 7{,}2 \cdot 7{,}2 \cdot \sin\gamma = 12 \qquad | \cdot 2$$

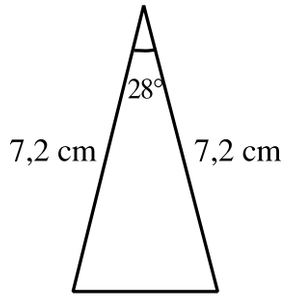
$$7{,}2^2 \sin\gamma = 24 \qquad | : 7{,}2^2$$

$$\sin\gamma = \frac{24}{7{,}2^2}$$

Kulmilla γ ja $180° - \gamma$ on sama sini.

$\gamma \approx 28°$ tai $\gamma \approx 180° - 28° = 152°$.

Tehtävän ehdot täyttäviä tasakylkisiä kolmioita on kaksi erilaista.



Vastaus

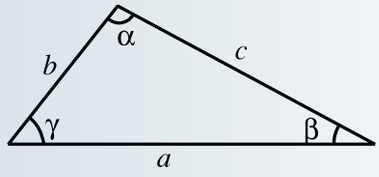
28° tai 152°

Sinilause

Sinilause. Jos kolmiosta valitaan mitkä tahansa kaksi sivua, niin niille ovat suhteet

$$\frac{\text{sivun pituus}}{\text{vastaisen kulman sini}}$$

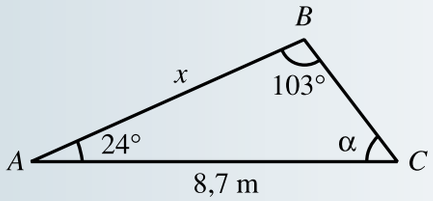
yhtä suuret.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Jos tunnetaan kolmion kaksi kulmaa ja yksi sivu, niin muut sivut voidaan ratkaista sinilauseen avulla.

Ratkaistaan esimerkiksi kuvion kolmion sivun AB pituus. Sivun AB vastaisen kulman suuruus on $\alpha = 180° - (24° + 103°) = 53°$.



Sinilauseen mukaan:

$$\frac{x}{\sin 53°} = \frac{8{,}7}{\sin 103°} \qquad \mid \cdot \sin 53°$$

$$x = \frac{8{,}7 \cdot \sin 53°}{\sin 103°} \approx 7{,}1 \text{ (m)}.$$

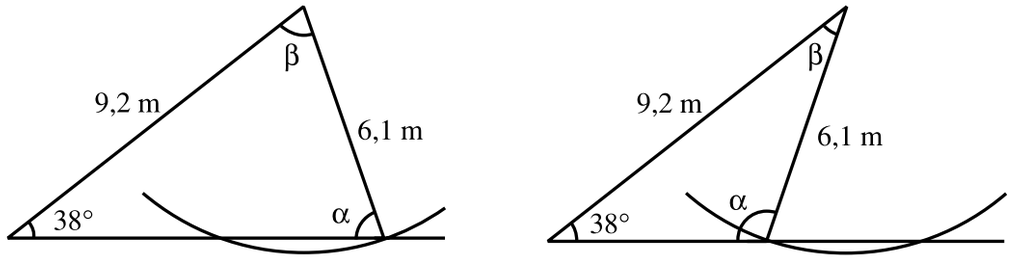
Jos tunnetaan kolmion kaksi sivua ja niistä toisen vastainen kulma, niin kolmion muut osat voidaan ratkaista sinilauseen avulla. Mahdollisia ratkaisukolmioita saattaa tällöin olla kaksi.

ESIMERKKI 7

Kolmion kahden sivun pituudet ovat 9,2 cm ja 6,1 cm, ja jälkimmäisen sivun vastaisen kulman suuruus on 38°. Kuinka suuret kolmion muut kulmat ovat?

Ratkaisu

Kuvion avulla nähdään, että kolmioita, joissa on vaaditut osat, on kaksi erilaista. Toisessa kolmiossa 9,2 cm:n sivun vastainen kulma α on terävä ja toisessa tylppä.



Kulma α ratkaistaan sinilauseen avulla.

$$\frac{9{,}2}{\sin\alpha} = \frac{6{,}1}{\sin 38°}$$ Kerrotaan ristiin.

$$6{,}1 \cdot \sin\alpha = 9{,}2 \cdot \sin 38° \quad | : 6{,}1$$

$$\sin\alpha = \frac{9{,}2 \sin 38°}{6{,}1}$$ Kulmilla α ja $180° - \alpha$ on sama sini.

$$\alpha \approx 68° \text{ tai } \alpha \approx 180° - 68° = 112°$$

Vastaavasti on

$$\beta \approx 180° - 38° - 68° = 74°$$

tai

$$\beta \approx 180° - 38° - 112° = 30°.$$

Vastaus

68° ja 74° tai 112° ja 30°

Harjoituksia

298. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 7,2 cm ja 4,1 cm. Näiden sivujen välisen kulman suuruus on 128°. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

299. Ympyrälle, jonka säde on 12,5 cm, on piirretty kaari, jonka keskuskulma 136°. Laske kaaren ja sen päätepisteitä yhdistävän jänteen rajaaman ympyräsegmentin pinta-ala.

300. Kolmion kahden sivun pituudeksi on määrätty 6,20 cm ja 8,10 cm. Kuinka suuri sivujen välisen kulman tulee olla, jotta kolmion pinta-ala olisi 20,0 cm^2?

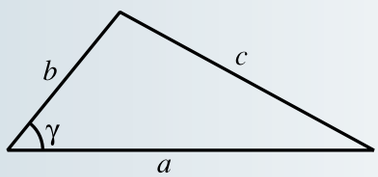
301. Kolmion kahden kulman suuruudet ovat 35° ja 75°, ja näiden kulmien välisen sivun pituus on 9,6 cm. Kuinka pitkä 75°:n kulman vastainen sivu on?

302. Kolmiossa on 30°:n ja 100°:n kulmat, ja suurimman kulman vastainen sivu on 10. Laske kolmion pinta-alan yksidesimaalinen likiarvo.
(Ylioppilaskoe, s. 1987)

Kosinilause

Kosinilause. Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua, γ niiden välinen kulma ja c kulman γ vastainen sivu, niin

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

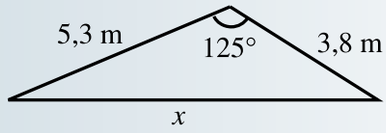


Kosinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion kolmas sivu, kun tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma.

Esimerkiksi kuvion kolmiossa on

$$x^2 = 5{,}3^2 + 3{,}8^2 - 2 \cdot 5{,}3 \cdot 3{,}8 \cdot \cos 125°$$

$$x \approx 8{,}1 \text{ (m)}.$$



Kosinilauseen avulla voidaan myös ratkaista kolmion kulmat, kun tunnetaan kolmion kaikki sivut.

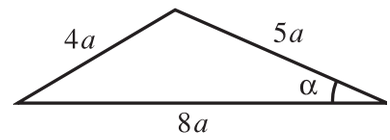
ESIMERKKI 8

Kolmion sivujen pituuksien suhteet ovat $4 : 5 : 8$. Määritä kolmion pienimmän kulman kosinin tarkka arvo ja kulman suuruuden likiarvo asteen sadasosien tarkkuudella.

Ratkaisu

Merkitään kolmion sivuja $4a$, $5a$ ja $8a$.

Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma α.



Kosinilauseen mukaan:

$$(4a)^2 = (5a)^2 + (8a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 8a \cdot \cos\alpha$$

$$16a^2 = 25a^2 + 64a^2 - 80a^2\cos\alpha \qquad | : a^2$$

$$16 = 25 + 64 - 80\cos\alpha \qquad \text{Ratkaistaan } \cos\alpha.$$

$$80\cos\alpha = 73 \qquad | : 80$$

$$\cos\alpha = \frac{73}{80} \qquad \text{kosinin tarkka arvo}$$

$$\alpha \approx 24{,}15°.$$

Vastaus

$\cos\alpha = \frac{73}{80}$, $\alpha \approx 24{,}15°$

Harjoituksia

303. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 8,3 cm ja 5,2 cm, ja näiden sivujen välisen kulman suuruus on 102°. Kuinka pitkä kolmion kolmas sivu on?

304. Kolmion sivut ovat 2, 4 ja 5. Määritä kolmion suurin kulma 0,1°:en tarkkuudella. (Ylioppilaskoe, s. 1990)

305. Suunnistaja lähti 1 350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1 350 m? (Ylioppilaskoe, s. 1997)

306. Suunnikkaan lävistäjien pituudet ovat 9,8 cm ja 12,0 cm. Lävistäjien välisen kulman suuruus on 54°. Kuinka pitkät suunnikkaan sivut ovat?

TEHTÄVIÄ

307. Suorakulmion sivut ovat 4 ja 3. Kahta vastakkaista kärkeä yhdistävää lävistäjää vastaan piirretään kahdesta muusta kärjestä kohtisuorat, jotka jakavat lävistäjän kolmeen osaan. Laske osien pituudet.

308. Olkoon K ympyrän keskipiste, A ja B ympyrän halkaisijan päätepisteet ja C mielivaltainen kehän piste, joka ei ole A eikä B. Todista, että kehäkulma CAB on puolet keskuskulmasta CKB. (Ylioppilaskoe, s. 1996)

309. Neliön yhden kärjen kautta kulkevat kaksi suoraa jakavat neliön kolmeen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. Laske suorien välisen kulman suuruus kolmen numeron tarkkuudella.

310. Rantakaavassa määrätään, että 100 m lähemmäksi rantaa ei saa rakentaa. Kaava-alueella on tasasivuisen kolmion muotoinen saari, jonka pinta-ala on 5,00 ha. Saako sille rakentaa?
(Ylioppilaskoe, k. 1995)

311. Suuri kolmion muotoinen täytekakku ABC leikataan kolmeen yhtä suureen osaan sivulta AB alkavilla sivun BC suuntaisilla suorilla viilloilla. Sivun AB pituus on 85 cm. Määritä viiltojen aloituspaikat.

312. Kolmion ABC ympäri on piirretty ympyrä. Pisteestä A piirretään kolmion korkeusjana AK ja ympyrän halkaisija AD. Osoita, että kolmiot ABD ja AKC ovat yhdenmuotoiset.

313. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 1 : 2. Missä suhteessa hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan?
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

314. Tasakylkisen kolmion kantakulman sini on $\frac{1}{3}$. Laske huippukulman kosinin tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.
(Ylioppilaskoe, k. 1999)

315. Ympyrä sivuaa yhtä neliön sivua ja kulkee vastakkaisen sivun päätepisteiden kautta. Mikä ympyrän säde on, jos neliön sivu on a?

316. Tasaisella maanpinnalla sijaitsevan tornin huippu näkyy eräästä paikasta katsottuna 3,5 asteen kulmassa vaakasuoraan tasoon nähden. Tasan puoli kilometriä kauempaa katsottuna kulma on 2,5 astetta. Mikä on tornin korkeus, ja mitkä ovat katseluetäisyydet? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

317. Kaupungeilla A ja B on kummallakin keskustassaan paikallisradioasema, jonka kuuluvuusalue ulottuu 60 kilometrin päähän asemasta joka suuntaan. Asemien välimatka on 102 km. Autoilija, joka ajaa suoraa tietä kohti kaupunkia B, saapuu kaupungin A aseman kuuluvuusalueelle. Tämän jälkeen hän ajaa 38 km, ennen kuin A:n aseman lähetys lakkaa kuulumasta. Onko hän tällöin jo kaupungin B aseman kuuluvuusalueella? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

318. Lentokone, joka on 15 kilometrin korkeudessa merenpinnasta rantaviivan yläpuolella, lähettää valosignaaleja, jotka merellä oleva laiva näkee horisontissa. Kuinka pitkä matka laivan on kuljettava rantaan päästäkseen? Maapallon halkaisija on 12 756 km. (Ylioppilaskoe, s. 1992)

319. Vuoren huippu näkyy paikassa A olevasta laivasta suoraan etelässä $15°$ horisontin yläpuolella. Kun laiva siirtyy sellaiseen kohtaan B, että suunta AB muodostaa $70°$:en kulman eteläsuunnan kanssa ja etäisyys $AB = 4{,}00$ km, näkyy huippu suoraan lounaassa. Laske huipun korkeus. (Ylioppilaskoe, k. 1987)

320. Havaintopisteestä A näkyy vuoren huippu H suoraan lännessä $17{,}4°$ vaakatason yläpuolella. Toisesta havaintopisteestä B, joka on tasan 3 000 metriä pisteestä A pohjoiseen, huippu näkyy $14{,}5°$ vaakatason yläpuolella. Mikä on vuoren korkeus merenpinnasta, kun havaintopisteet ovat 200 metrin korkeudella merenpinnasta? Maanpinnan kaarevuutta ei tarvitse ottaa huomioon. (Ylioppilaskoe, k. 1997)

321. Vene on purjehtinut 6,7 kilometrin etäisyydelle lähtösatamasta, ja veneestä näkyvät satamassa ja luodolla olevat valot suunnissa, joiden välinen kulma on $18°$. Merikortin mukaan luodon etäisyys satamasta on 3,6 km. Kuinka etäällä vene on luodosta?

322. Ympyrää, jonka säde on 3, ympäröi tasakylkinen kolmio, jonka kaikki sivut sivuavat ympyrää ja jonka kannan pituus on 12. Kuinka pitkä kolmion huipusta kannalle piirretty korkeusjana on?

323. Neljän r-säteisen ympyrän keskipisteet ovat $2r$-sivuisen neliön kärjissä, ja R-säteinen ympyrä sivuaa kaikkia neljää ympyrää ($R > r$). Laske ensin mainittujen ympyröiden väliin jäävän alueen alan suhde R-säteisen ympyrän alaan. (Ylioppilaskoe, k. 1987)

324. Tikkaat, joiden pituus on 8,0 metriä, ovat aluksi pystysuorassa seinää vasten, minkä jälkeen tikkaiden alapäätä aletaan siirtää maata pitkin poispäin seinästä nopeudella 1,0 m/s. Millä nopeudella tikkaiden seinällä oleva yläpää laskeutuu yhden sekunnin ja kuuden sekunnin kuluttua?

325. Ympyrän muotoinen allas halutaan ympäröidä poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoisilla pylväillä, joiden poikkileikkauksen säde on neljäsosa altaan säteestä. Pylväät asetellaan niin, että pylväiden keskipisteet ovat altaan kanssa samankeskisellä ympyrällä ja jokainen pylväs koskettaa kahta viereistä pylvästä. Pylväitä hankitaan mahdollisimman vähän. Kuinka monta pylvästä hankitaan? Kuinka monta prosenttia altaan sädettä pitempi on sen ympyrän säde, jolle pylväiden keskipisteet sijoitetaan? Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

326. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 1 ja 2. Määritä kolmannen sivun pituus, kun sivu on yhtä pitkä kuin a) sivulle piirretty keskijana b) sivulle piirretty vastaisen kulman puolittaja.

327. Monet fysiikan kaavat (esimerkiksi kuvausyhtälö) voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, missä a, b ja f ovat positiivisia. Jos luvuista a, b ja f tunnetaan kaksi, niin kolmas voidaan määrittää graafisesti seuraavan niin sanotun nomogrammin avulla.
Piirretään kolmio AOB, jossa kulman O suuruus on $120°$. Osoita, että jos sivun OA pituus on a, sivun OB pituus b ja kulman O puolittajan pituus f, niin $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Ratkaise nomogrammin avulla b, kun $a = 6{,}7$ ja $f = 2{,}9$. Piirrä kuvio käyttäen yksikköä senttimetri. Selosta lyhyesti, kuinka piirsit kuvion.

328. Neliön muotoisen ruohokentän kulmaan kiinnitetään lampaan liekaköysi siten, että lammas pääsee syömään 90 % kentän ruohosta. Kuinka monta prosenttia (kahden numeron tarkkuudella) köyden pituus on kentän lävistäjän pituudesta? Tehtävä vaatii sopivalle tuntemattomalle johdetun yhtälön numeerisen ratkaisemisen. (Ylioppilaskoe, s. 1993)

329. Osoita, että puolisuunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on yhtä suuri kuin yhdensuuntaisten sivujen kaksinkertainen tulo lisättynä kahden muun sivun neliöiden summalla.

Avaruusgeometria

Kulma avaruudessa

Kahden janan välinen kulma

Kahden janan välinen kulma lasketaan sopivasta kolmiosta. Jos kolmio on suorakulmainen, kulman suuruus saadaan suorakulmaisen kolmion trigonometrialla. Jos kolmio ei ole suorakulmainen, kulman suuruus lasketaan kosini- tai sinilauseella.

Kolmion sivuja laskettaessa joudutaan joskus laskemaan suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus.

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden neliö on särmien pituuksien a, b ja c neliöiden summa.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Erityisesti kuutiossa, jonka särmän pituus on a, on
$d^2 = a^2 + a^2 + a^2$ eli $d^2 = 3a^2$.
Kuution avaruuslävistäjän pituus on

$$d = a\sqrt{3},$$

missä a on kuution särmän pituus.*

---

* Yleinen avaruuslävistäjän pituuden kaava ja kuution avaruuslävistäjän pituuden kaava ovat taulukkokirjassa.

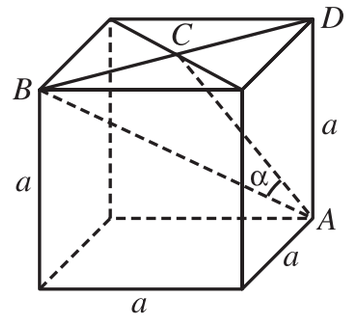
ESIMERKKI 1

Kuution kärjestä piirretään jana vastapäisen tahkon keskipisteeseen. Laske kolmen numeron tarkkuudella janan ja samasta kärjestä piirretyn avaruuslävistäjän välisen kulman suuruus.

Ratkaisu

Merkitään kuution särmien pituutta a.

Kolmiossa ABC jana AB on kuution avaruuslävistäjä.



$$AB = \sqrt{3}\,a$$

Janan BC pituus on puolet tahkoneliön lävistäjän BD pituudesta.

$$BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$$

Janan AC pituus x lasketaan Pythagoraan lauseella suorakulmaisesta kolmiosta ADC.

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$x^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2$$

$$x^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,a$$

Siis $AC = \sqrt{\frac{3}{2}}\,a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,a.$

Kulman α suuruus lasketaan kosinilauseella.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = (\sqrt{3}\,a)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)^2 - 2\cdot\sqrt{3}\,a\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\cdot\cos\alpha \qquad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}a^2 = 3a^2 + \frac{3}{2}a^2 - 3\sqrt{2}\,a^2\cos\alpha \qquad |:a^2$$

$$\frac{1}{2} = 3 + \frac{3}{2} - 3\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$3\sqrt{2}\cos\alpha = 4 \qquad |:3\sqrt{2}$$

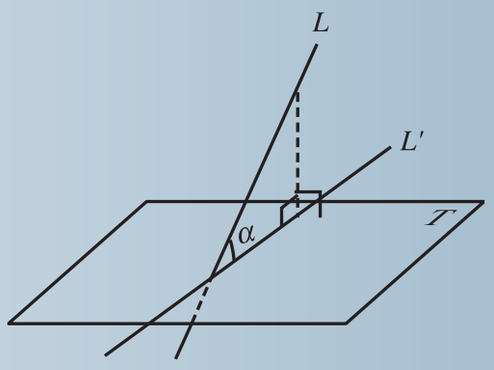
$$\cos\alpha = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\alpha \approx 19{,}5°$$

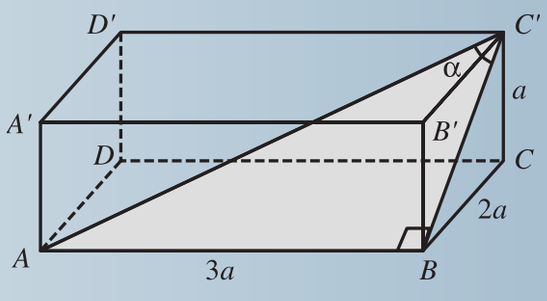
Vastaus 19,5°

Suoran ja tason välinen kulma

Kuvio havainnollistaa suoran L ja tason T välisen kulman määritelmää. Suoran L ja tason T välinen kulma α on suoran L ja sen tasossa T olevan kohtisuoran projektion L' välinen kulma.

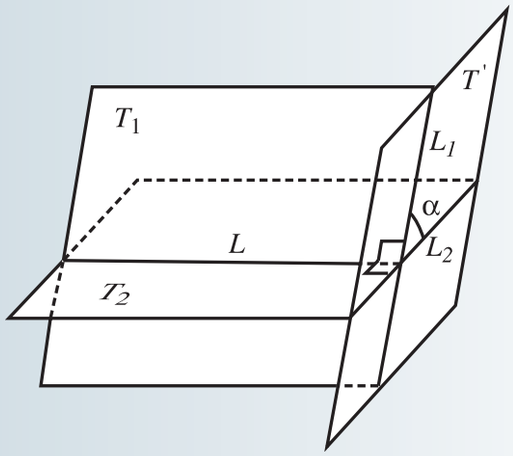


Lasketaan esimerkiksi kuvion suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän AC' ja sivutahkon $BCC'B'$ välinen kulma. Avaruuslävistäjän $C'A$ kohtisuora projektio tahkolle on lävistäjä $C'B$. Kysytty kulma on suorakulmaisen kolmion $AC'B$ kulma C'. Pythagoraan lauseella saadaan $BC' = \sqrt{5}\,a$, jolloin $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ja $\alpha \approx 53{,}3°$.

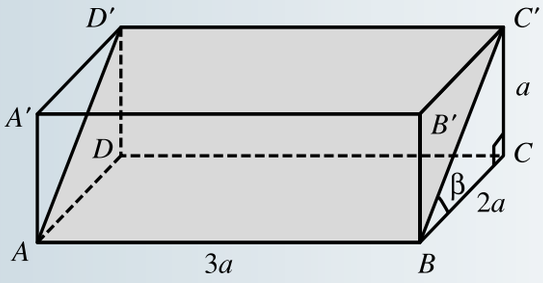


Kahden tason välinen kulma

Kuvio havainnollistaa tasojen T_1 ja T_2 välisen kulman määritelmää. T' on taso, joka on kohtisuorassa tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoraa L vastaan. Tasot T_1 ja T_2 leikkaavat tason T' pitkin suoria L_1 ja L_2. Tasojen T_1 ja T_2 välinen kulma α on suorien L_1 ja L_2 välinen kulma.



Lasketaan esimerkiksi edellisen suorakulmaisen särmiön särmien AB ja $C'D'$ määräämän tason ja pohjatahkon $ABCD$ määräämän tason välinen kulma. Päätytahko $BCC'B'$ on kohtisuorassa molempia tasoja vastaan. Kysytty kulma on suorakulmaisen kolmion BCC' kulma B.



Koska $\tan\beta = \frac{1}{2}$, niin $\beta \approx 26{,}6°$.

ESIMERKKI 2

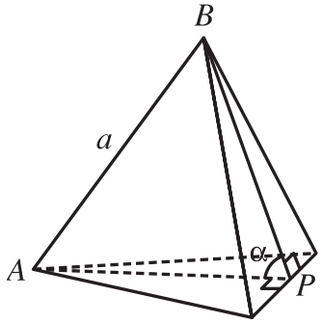
Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella säännöllisen nelitahokkaan tahkojen välinen kulma.

Ratkaisu

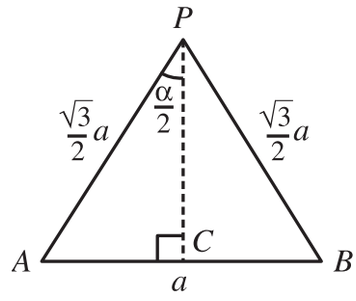
Säännöllisen nelitahokkaan (tetraedrin) tahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

Merkitään tetraedrin särmien pituutta a.

Piirretään kahden tahkon korkeusjanat AP ja BP tahkojen yhteiselle särmälle. Korkeusjanat ovat särmää vastaan kohtisuorassa tasossa, joten niiden välinen kulma on tahkojen välinen kulma.



Tahkokolmiot ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on a, joten korkeusjanojen AP ja BP pituus on $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Suorakulmaisesta kolmiosta ACP saadaan

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

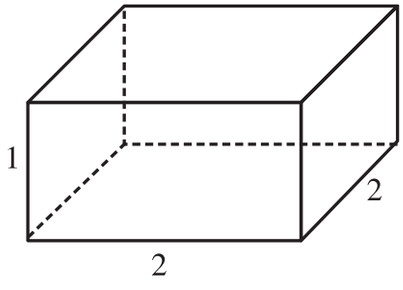
joten $\alpha \approx 70{,}5°$.

Vastaus 70,5°

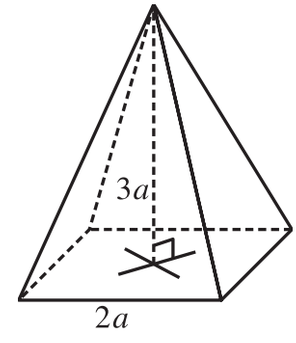
Harjoituksia

330. Kuinka pitkä suora ohut sauva mahtuu suorakulmaisen särmiön muotoiseen laatikkoon, jonka särmien pituudet ovat 35 cm, 45 cm ja 55 cm?

331. Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö, jonka sivujen pituus on 2, ja särmiön korkeus on 1. Laske asteen tarkkuudella a) avaruuslävistäjän ja samasta kärjestä lähtevän pohjasärmän välinen kulma b) avaruuslävistäjän ja pohjatahkon välinen kulma c) avaruuslävistäjän ja sivutahkon välinen kulma d) kahden vastakkaisen särmän kautta kulkevan tason ja pohjatahkon välinen kulma.



332. Suoran neliöpohjaisen pyramidin pohjasärmän pituus on $2a$ ja korkeus $3a$. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella a) samasta kärjestä lähtevän sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma b) kahden vierekkäisen sivusärmän välinen kulma c) kahden vastakkaisen sivusärmän välinen kulma d) sivusärmän ja pohjan välinen kulma e) kahden vastakkaisen sivutahkon välinen kulma f) pohjatahkon ja sivutahkon välinen kulma.



333. Kuution tahkon keskipiste yhdistetään janoilla vastakkaisen tahkon lävistäjän päätepisteisiin. Laske janojen välisen kulman suuruus kolmen numeron tarkkuudella.

Tilavuuksia ja pinta-aloja

Tilavuuden ja pinta-alan laskeminen

Kappaleiden tilavuuden ja pinta-alan laskukaavat ovat taulukkokirjassa.

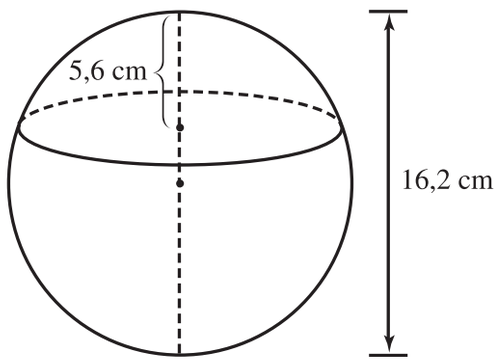
ESIMERKKI 3

Pallon muotoisesta melonista, jonka halkaisija on 16,2 cm, leikataan suoralla viillolla 5,6 cm:n paksuinen pala. Kuinka monta prosenttia palan tilavuus on melonin tilavuudesta?

Ratkaisu

Pala on 5,6 cm korkea pallosegmentti.

Pallon säde on $r = \frac{16{,}2 \text{ cm}}{2} = 8{,}1 \text{ cm}$.



Segmentin tilavuus on

$V_S = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$ Sijoitetaan segmentin korkeus $h = 5{,}6$ ja pallon säde $r = 8{,}1$.

$= \pi \cdot 5{,}6^2 \cdot (8{,}1 - \frac{5{,}6}{3}) \approx 614{,}1 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Pallon tilavuus on

$V_P = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}1^3 \approx 2\,226 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Segmentin tilavuuden suhde pallon tilavuuteen on

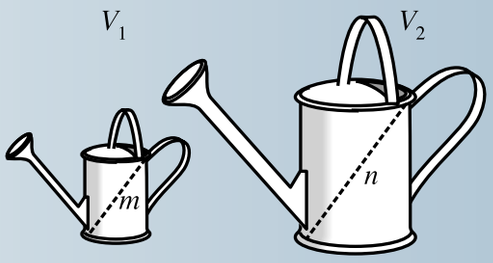
$\frac{614{,}1}{2\,226} \approx 0{,}28 = 28\ \%$.

Vastaus 28 %

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on yhdenmuotoisuussuhteen kuutio.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^3$$



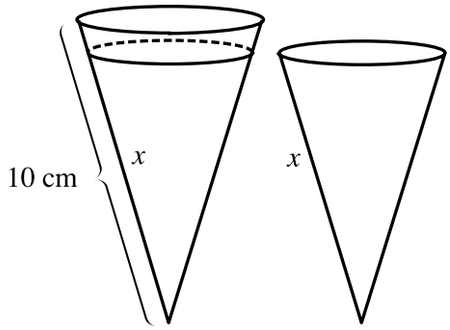
ESIMERKKI 4

Suoran ympyräkartion muotoiseen pikariin, jonka vetoisuus on 12 cl ja sivujanan pituus 10 cm, on kaiverrettava merkki 8 cl:n kohdalle. Määritä merkin paikka.

Ratkaisu

Kun kartio leikataan pohjan suuntaisella tasolla, erottuva kartio on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa.

Olkoon x merkin etäisyys pikarin pohjasta.



$$\left(\frac{x}{10}\right)^3 = \frac{8}{12}$$

Tilavuuksien suhde on vastinjanojen pituuksien suhteen kuutio.

$$\frac{x}{10} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 8{,}7 \text{ (cm)}$$

Viiva on merkittävä 8,7 cm:n etäisyydelle pikarin pohjasta.

Vastaus

8,7 cm pikarin pohjasta

Harjoituksia

334. Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadetaan 5,0 l vettä. Tällöin veden korkeus astiassa on 22 cm. Laske pohjan halkaisija.
(Ylioppilaskoe, k. 1997)

335. Kuinka paljon peltiä tarvitaan, kun tehdään suoran ympyrälieriön muotoinen umpinainen tölkki, jonka vetoisuus on 20 cl ja jonka korkeuden suhde pohjan halkaisijaan on 3 : 2?

336. Neljästä desilitrasta savea muotoillaan kaksi palloa siten, että pienemmän tilavuus on puolet suuremman tilavuudesta. Mitkä ovat pallojen säteet?
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

337. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan pohjaneliön sivun pituus on 3,0 metriä. Teltan katon pinta-ala on 15 m^2. Laske teltan korkeus ja tilavuus.

338. Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala on kaksi kertaa niin suuri kuin pohjan pinta-ala. Laske kartion sivujanan ja kartion pohjan välisen kulman suuruus.

339. Suoran kartion muotoisen pikarin tilavuus on 12 cl. Kuinka paljon lasissa on nestettä, kun nestekerroksen korkeus on kaksi kolmasosaa pikarin korkeudesta?

340. Pyramidin muotoinen 15,0 cm korkea juusto on leikattava pohjan suuntaisesti kahdeksi yhtä suureksi palaksi. Laske palojen korkeudet.

Sisäkkäisiä kappaleita

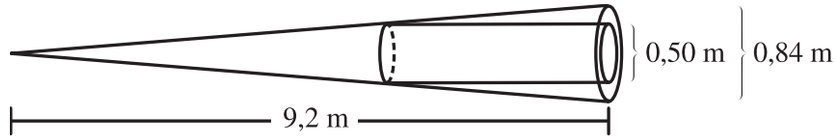
Tyypillisiä avaruusgeometrian ongelmia ovat tilanteet, joissa on laskettava sisäkkäin asetettujen kappaleiden osia.

ESIMERKKI 5

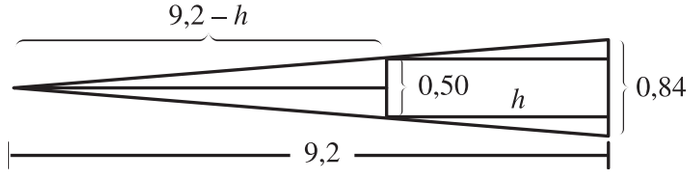
Suoran ympyräkartion muotoisesta tukista, jonka halkaisija tyvessä on 84 cm ja pituus 9,2 m, veistetään mahdollisimman pitkä, poikkileikkaukseltaan pyöreä 50 cm paksu pölkky. Kuinka pitkä pölkky tukista saadaan?

Ratkaisu

Valitaan yksiköksi metri.



Leikataan kappaleet tasolla, joka sisältää kartion akselin. Merkitään pölkyn pituutta h.



Yhdenmuotoisista kolmioista (samankohtaiset kulmat ja yhteinen kulma) saadaan yhtälö.

$$\frac{9{,}2 - h}{9{,}2} = \frac{0{,}50}{0{,}84}$$ Kerrotaan ristiin.

$$0{,}5 \cdot 9{,}2 = 0{,}84(9{,}2 - h)$$

$$4{,}6 = 7{,}728 - 0{,}84h$$

$$0{,}84h = 3{,}128 \quad | : 0{,}84$$

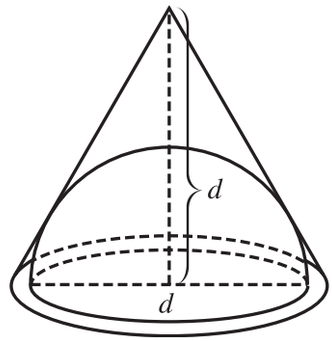
$$h \approx 3{,}7 \text{ (m)}$$

Vastaus

3,7 m

ESIMERKKI 6

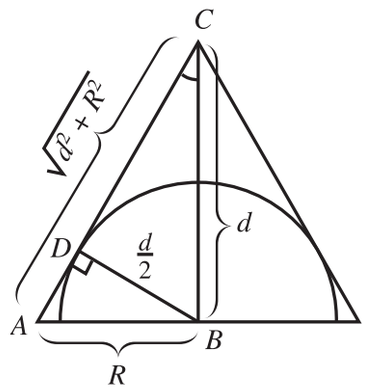
Puolipallo sivuaa suoran ympyräkartion vaippaa, ja puolipallon pohjaympyrä on kartion pohjalla. Kartion korkeus on yhtä suuri kuin puolipallon halkaisija d. Laske kartion pohjan halkaisijan pituus.



Ratkaisu

Leikataan kappaleet tasolla, joka sisältää kartion akselin.

Merkitään kartion pohjan sädettä R.



Kuvion kolmiot ABC ja BDC ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä niillä on yhteinen kulma ja molemmissa on suora kulma.

Pythagoraan lauseella saadaan janan AC pituus $\sqrt{d^2 + R^2}$.

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö.

$$\frac{d}{2} : R = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

$$\frac{d}{2R} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} \qquad \big| : d$$

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

Kerrotaan ristiin.

$$2R = \sqrt{d^2 + R^2}$$

Koska $2R \geqslant 0$, yhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön kanssa.

$$4R^2 = d^2 + R^2$$

$$3R^2 = d^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3} d^2$$

$$R = (\pm) \frac{1}{\sqrt{3}} d$$

Kartion pohjaympyrän halkaisija on $2R = \frac{2}{\sqrt{3}} d$.

Vastaus $\frac{2}{\sqrt{3}} d$

Harjoituksia

341. Pallon säde on 43 cm. Pallon sisällä on mahdollisimman suuri 60 cm korkea suora ympyrälieriö. Kuinka pitkä lieriön pohjan halkaisija on?

342. Suoran neliöpohjaisen pyramidin korkeus on 16 ja pohjaneliön sivun pituus 12. Pyramidin sisällä on suora ympyrälieriö, jonka toinen pohjaympyrä on pyramidin pohjalla ja toinen pohjaympyrä sivuaa pyramidin sivutahkoja. Lieriön pohjan halkaisija on 8. Mikä lieriön korkeus on?

343. r-säteisen puolipallon sisällä on kuutio, jonka yksi tahko on puolipallon pohjaympyrällä ja vastakkaisen tahkon kärjet puolipallon pinnalla. Laske kuution särmän pituus.

TEHTÄVIÄ

344. Ympyrästä, jonka säde on 18 cm, leikataan 240°:n sektori, joka kiedotaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Laske ympyräkartion tilavuus.

345. Suoran neliöpohjaisen pyramidin vaippa muodostuu tasakylkisistä kolmioista, joiden huippukulma on 42,0°. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella pyramidin vaippakolmion ja pyramidin pohjan välinen kulma.

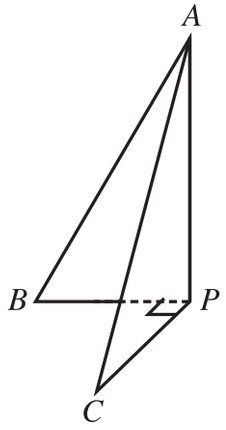
346. Moottorisahan öljyä myydään 1 litran ja 3 litran muovipulloissa. Pullot ovat samanmuotoiset, ja pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan. Kuinka moninkertainen muovimäärä on 3 litran pullossa 1 litran pulloon verrattuna? Kuinka monta prosenttia vähemmän 3 litran pullossa on käytetty muovia öljylitraa kohti kuin 1 litran pullossa?
(Ylioppilaskoe, k. 1999)

347. Suoran ympyrälieriön muotoisen litran mitan pohjan halkaisija on 8,2 cm. Kuinka suuri on yhdenmuotoisen desilitran mitan korkeus?

348. Kuution yhden tahkon lävistäjän päätepisteistä piirretään janat vastakkaisen tahkon särmän keskipisteeseen. Laske janojen välisen kulman suuruus kolmen numeron tarkkuudella.

349. Palloon, jonka säde on r, on piirretty säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka huippu ja pohjaneliön kärjet ovat pallon pinnalla ja jonka korkeus on $\frac{3r}{2}$. Laske pyramidin tilavuuden suhde pallon tilavuuteen. Määritä suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina kolmen numeron tarkkuudella.

350. Tasasivuinen kolmio on taitettu pitkin korkeusjanaa niin, että taitosten välinen kulma on suora kulma. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) kulma BAC
b) tasojen ABC ja PBC välinen kulma
c) suoran AP ja tason ABC välinen kulma.



351. Ympyrälieriön muotoinen putki, jonka pituus on 50 cm ja halkaisija ulkoa mitattuna 10 cm sekä sisältä mitattuna 9,9 cm, peitetään sekä ulkoa että sisältä 0,1 mm maalikerroksella. Kuinka monta prosenttia enemmän maalia kuluu ulkopuolen maalaamiseen?
(Ylioppilaskoe, s. 1992)

352. Suoran ympyräkartion pohjana on kuution pohjaneliöön sisäänpiirretty ympyrä. Kartio leikkaa kuution vastakkaisen tahkon pitkin ympyrää, jonka ala on kolmasosa pohjaympyrän alasta. Laske kartion tilavuuden ja kuution tilavuuden suhde. (Ylioppilaskoe, k. 1991)

353. Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 200 l ja sen sivun pituus on 1,12 m. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on polttoainetta 32 cm. Ostaja maksoi tynnyristä polttoaineineen 600 mk. Tekikö ostaja hyvän kaupan, kun polttoaine maksaa 4,67 mk/l ja tynnyri on arvoltaan 100 mk?
(Ylioppilaskoe, s. 1995)

354. Maapallon napa-alueiksi kutsutaan pohjoisen napapiirin pohjoispuolella olevaa aluetta ja eteläisen napapiirin eteläpuolista aluetta. Trooppinen alue on päiväntasaajan kummallakin puolella kääntöpiirien välissä oleva alue. Kuinka monta prosenttia napa-alueet ovat koko maapallon pinta-alasta? Entä kuinka monta prosenttia on trooppinen alue? Napapiirin leveysaste on $66{,}5°$ ja kääntöpiirin $23{,}5°$.
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

355. Paikkakunnat A ja B sijaitsevat pohjoisella pallonpuoliskolla siten, että kummankin leveysaste on 49 mutta pituusasteiden ero on 38. Laske paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin mitattuna. Laske myös paikkakuntien välinen lyhin välimatka maan pintaa pitkin mitattuna. (Maanpinnan epätasaisuutta ei oteta huomioon.) Maapallon isoympyrän pituudeksi oletetaan $40\,000$ km. Anna vastaus kolmen numeron tarkkuudella. (Ylioppilaskoe, s. 1999)

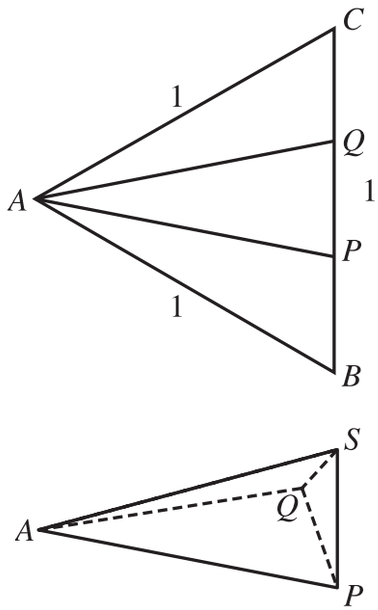
356. Suoran ympyräkartion korkeuden H ja pohjan säteen R suhde on 2. Määritä kartion sisään piirretyn pallon tilavuuden suhde kartion tilavuuteen. Tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla. (Ylioppilaskoe, k. 1989)

357. Neliön muotoiseen kehikkoon, jonka sivu on $8r$, asetetaan r-säteisiä palloja toistensa viereen 16 kappaletta. Yhdeksään pallojen väliin jäävään kuoppaan asetetaan samoin r-säteiset pallot ja näiden yhdeksän pallon päälle edelleen neljä palloa ja näiden päälle yksi pallo. Mikä on syntyneen pallopyramidin korkeuden suhde pallon halkaisijaan $2r$? (Ylioppilaskoe, s. 1993)

358. Astia on muodoltaan kärki alaspäin seisova suora pyramidi, jonka pohja on neliön muotoinen ja jonka korkeus on yhtä suuri kuin pohjasärmän pituus. Astiaa ryhdytään täyttämään valuttamalla siihen vettä 2 litraa sekunnissa. Millä nopeudella vedenpinta nousee
a) $0{,}5$ sekunnin b) 10 sekunnin kuluttua?

359. Suoran neliöpohjaisen pyramidin sivusärmien pituuksien suhde pohjasärmien pituuteen on $3 : 2$. Laske kolmen numeron tarkkuudella pyramidin vierekkäisten sivutahkojen välinen kulma.

360. Tasasivuisen kolmion ABC kaikkien sivujen pituus on 1. Kolmion sivu BC jaetaan pisteillä P ja Q kolmeen yhtä pitkään osaan ja kolmio taitetaan pitkin janoja AP ja AQ niin, että kärjet B ja C yhtyvät pisteessä S.
Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) särmän AS ja tahkon APQ välinen kulma
b) tahkojen APS ja AQS välinen kulma.
c) Laske nelitahokkaan $APQS$ tilavuus.



361. Kolmio pyörähtää vuorollaan jokaisen sivunsa ympäri. Osoita, että muodostuvista kappaleista sekä tilavuudeltaan että pinta-alaltaan pienin on se, joka syntyy kolmion pyörähtäessä pisimmän sivunsa ympäri, ja suurin on se, joka syntyy pyörähdyksessä lyhimmän sivun ympäri.

Analyyttinen geometria

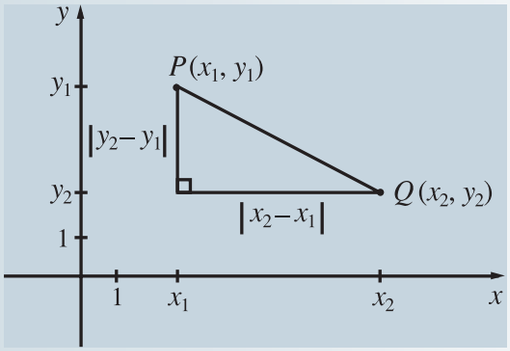
Ympyrän yhtälö

Etäisyys koordinaatistossa

Pythagoraan lauseen nojalla pisteiden $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ etäisyys (janan PQ pituus) on*

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Etäisyyttä laskettaessa lasketaan päätepisteiden x-koordinaattien erotuksen neliö ja y-koordinaattien erotuksen neliö. Etäisyys on neliöiden summan neliöjuuri.



Esimerkiksi pisteiden $(6, -1)$ ja $(-2, 3)$ etäisyys on

$$\sqrt{(-2-6)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9.$$

Käyrän yhtälö

Analyyttinen geometria tutkii käyriä koordinaatistossa yhtälöiden avulla.

Käyrän yhtälö on muuttujien x ja y yhtälö, jolla on ominaisuus:

> Piste (x, y) on käyrällä, jos ja vain jos pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön.

Tutkitaan esimerkiksi, mitä käyrää esittää yhtälö $4x^2 - y^2 = 0$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(2x + y)(2x - y) = 0$ kanssa, joten yhtälö toteutuu, jos ja vain jos $2x + y = 0$ tai $2x - y = 0$. Yhtälö $4x^2 - y^2 = 0$ esittää siis kahta toisensa leikkaavaa suoraa: suoraa $y = -2x$ ja suoraa $y = 2x$.

---

* Etäisyyden kaava, kuten muutkin analyyttisen geometrian keskeiset kaavat ja yhtälöt, on taulukkokirjassa.

Ympyrän yhtälö

Piste (x, y) on ympyrällä, jonka keskipiste on (a, b) ja säde r, jos ja vain jos pisteen (x, y) pisteestä (a, b) lasketun etäisyyden neliö on yhtä suuri kuin säteen r neliö eli

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Yhtälö on ympyrän *keskipistemuotoinen yhtälö.*

Esimerkiksi yhtälö $(x + 4)^2 + y^2 = 5$ voidaan saattaa muotoon $(x - (-4))^2 + (y - 0)^2 = 5$. Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(-4, 0)$. Koska $r^2 = 5$, ympyrän säde $r = \sqrt{5}$.

ESIMERKKI 1

Ympyrän halkaisijan päätepisteet ovat $A(6, -3)$ ja $B(-1, 2)$. Muodosta ympyrän yhtälö.

Ratkaisu

Ympyrän säde on puolet halkaisijan AB pituudesta d.

$$d = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$$

Ympyrän säde on $r = \frac{\sqrt{74}}{2}$.

Ympyrän keskipiste on pisteitä $(6, -3)$ ja $(-1, 2)$ yhdistävän janan keskipiste.

Keskipisteen x-koordinaatti on

$$\frac{6 + (-1)}{2} = \frac{5}{2}$$

päätepisteiden x-koordinaattien keskiarvo $\frac{x_1 + x_2}{2}$

ja y-koordinaatti

$$\frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

päätepisteiden y-koordinaattien keskiarvo $\frac{y_1 + y_2}{2}$

Ympyrän yhtälö on

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - (-\frac{1}{2}))^2 = \left(\frac{\sqrt{74}}{2}\right)^2$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, missä $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ ja $r = \frac{\sqrt{74}}{2}$.

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{37}{2}.$$

Vastaus $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{37}{2}$

Harjoituksia

362. Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A = (-2, 6)$, $B = (4, -2)$ ja $C = (8, 4)$. Laske a) sivun AB pituus b) kärjestä A piirretyn keskijanan pituus.

363. Mitä käyrää yhtälö esittää? Piirrä käyrä.
a) $y^2 = (x - 3)^2$ b) $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

364. Muodosta yhtälö ympyrälle,
a) jonka keskipiste on piste $(-3, 1)$ ja säde 5
b) jonka keskipiste on origo ja joka kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta.

365. Ympyrän yhtälö on $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17$.
a) Onko piste $(-1, -3)$ ympyrällä?
b) Mitkä ympyrän keskipiste ja säde ovat?

366. Määritä pisteen $(-4, 3)$ etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 = 8$.

Yhtälö $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Neliöiksi täydentäminen

Muotoa

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

oleva yhtälö voidaan neliöiksi täydentämällä saattaa muotoon $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$. Tällöin pätee:

- jos $c > 0$, yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on (a, b) ja säde $\sqrt{c}$
- jos $c = 0$, yhtälö esittää pistettä (a, b)
- jos $c < 0$, yhtälö ei ole minkään käyrän yhtälö.

Esimerkiksi yhtälö $x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0$ voidaan suoraan saattaa muotoon $x^2 + (y + 3)^2 = 0$. Yhtälö esittää pistettä $(0, -3)$.

ESIMERKKI 2

Mitä käyrää yhtälö $x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{17}{4} = 0$ esittää?

Ratkaisu

$$x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{17}{4} = 0 \qquad \left| -\frac{17}{4} \right.$$

Vakiotermi siirretään oikealle puolelle ja termit ryhmitellään.

$$x^2 - x + y^2 + 6y = -\frac{17}{4}$$

Yhtälön molemmille puolille lisätään kertoimien 1 ja 6 puolikkaiden neliöt.

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 6y + 3^2 = -\frac{17}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = 5$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, -3)$ ja säde $\sqrt{5}$.

Vastaus

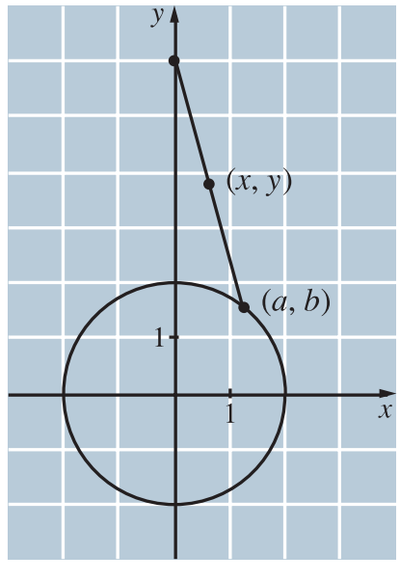
Ympyrää, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, -3)$ ja säde $\sqrt{5}$.

ESIMERKKI 3

Kuminauhan toinen päätepiste on pisteessä $(0, 6)$ ja toinen päätepiste liikkuu pitkin ympyrää $x^2 + y^2 = 4$. Minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää?

Ratkaisu

Ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ keskipiste on origo ja säde 2.



Merkitään kuminauhan keskipistettä (x, y). Tavoitteena on muodostaa yhtälö, jonka keskipisteen koordinaatit x ja y toteuttavat.

Olkoon (a, b) kuminauhan toinen päätepiste. Päätepiste on ympyrällä, joten sen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön eli

$a^2 + b^2 = 4$.

Ilmaistaan päätepisteen koordinaatit x:n ja y:n avulla.

Koska pisteitä $(0, 6)$ ja (a, b) yhdistävän janan keskipisteen x-koordinaatti on x, niin:

$$\frac{a + 0}{2} = x$$ Keskipisteen x-koordinaatti on päätepisteiden x-koordinaattien keskiarvo.

$$a = 2x.$$

Vastaavasti:

$$\frac{6 + b}{2} = y \qquad | \cdot 2$$

$$6 + b = 2y$$

$$b = 2y - 6.$$

Siis $a = 2x$ ja $b = 2y - 6$. Keskipisteen koordinaateille x ja y saadaan yhtälö:

$$a^2 + b^2 = 4 \qquad \text{Sijoitetaan } a = 2x \text{ ja } b = 2y - 6.$$

$$(2x)^2 + (2y - 6)^2 = 4$$

$$4x^2 + 4y^2 - 24y + 36 = 4$$

$$4x^2 + 4y^2 - 24y = -32 \qquad \big| : 4$$

$$x^2 + y^2 - 6y = -8 \qquad \big| + 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = -8 + 9$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(0, 3)$ ja säde 1.

Vastaus Ympyrän, jonka keskipiste on $(0, 3)$ ja säde 1.

Harjoituksia

367. Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 + x - 2y + \frac{5}{4} = 0$

368. Määritä ympyrän $4x^2 + 4y^2 + 40x + 36 = 0$ keskipiste ja säde ja laske ympyrän etäisyys origosta.

369. Millä vakion q arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 12x - 8y + q = 0$ esittää ympyrää?

370. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$ pisteet, jotka ovat

a) x-akselilla b) y-akselilla.

Suoran yhtälö

Suoran kulmakerroin

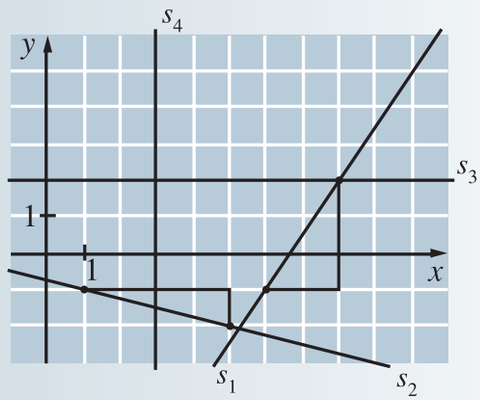
Suoran *kulmakerroin* on suhde

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}},$$

kun siirrytään suoran pisteestä toiseen.

- Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen.
- Laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen.
- x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.
- y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Esimerkiksi viereisessä kuviossa suoran s_1 kulmakerroin on $\frac{3}{2}$, suoran s_2 kulmakerroin on $-\frac{1}{4}$ ja suoran s_3 kulmakerroin on 0. Suoralla s_4 ei ole kulmakerrointa.



Jos suora kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, missä $x_1 \neq x_2$, niin suoran kulmakerroin on

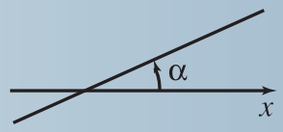
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kulmakerroin on pisteiden y-koordinaattien erotuksen suhde x-koordinaattien erotukseen.

Esimerkiksi pisteiden $(4, -1)$ ja $(-3, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{2-(-1)}{-3-4} = -\frac{3}{7}$.

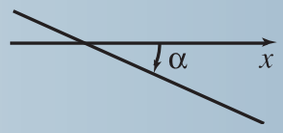
Suoran suuntakulma

Suoran *suuntakulma* α on suoran ja x-akselin välinen suunnattu kulma.



• Jos suora on nouseva, niin $0° < \alpha < 90°$.

• Jos suora on x-akselin suuntainen, niin $\alpha = 0°$.



• Jos suora on laskeva, niin $-90° < \alpha < 0°$.

y-akselin suuntaisella suoralla ei ole suuntakulmaa.

Suuntakulman tangentti on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin k.

$$\tan \alpha = k$$

Jos esimerkiksi suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$, niin yhtälöstä $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$ saadaan suuntakulman likiarvo $\alpha \approx -33{,}7°$.

Suoran yhtälön muodostaminen

Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja suoran kulmakerroin on k, suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Kaavan avulla voidaan muodostaa suoran yhtälö, jos suoralla on kulmakerroin eli jos suora ei ole y-akselin suuntainen.

Yhtälö saatetaan usein niin sanottuun *ratkaistuun muotoon*

$$y = kx + b.$$

Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$$x = x_0.$$

Jos esimerkiksi suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja suoran kulmakerroin on -4, suoran yhtälö on $y - 2 = -4(x - (-1))$ eli $y - 2 = -4(x + 1)$. Yhtälön ratkaistu muoto on $y = -4x - 2$.

Pisteen $(-6, 5)$ kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on $x = -6$.

Suorien välinen kulma

Jos kahden suoran kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2, niin suorien välisen kulman φ tangentti voidaan laskea kaavalla*

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Esimerkiksi suorien $y = -x + 5$ ja $y = \frac{2}{3}x - 4$ kulmakertoimet ovat $k_1 = -1$ ja $k_2 = \frac{2}{3}$. Suorien välisen kulman tangentti on

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 + (-1)\cdot\frac{2}{3}}\right| = \frac{5}{3} : \frac{1}{3} = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5,$$

joten $\varphi \approx 78{,}7°$.

Yhtälö $Ax + By + C = 0$

Yhtälö $Ax + By + C = 0$, jossa ainakin toinen kertoimista A ja B on eri suuri kuin nolla, esittää suoraa.

Yhtälö $3x + 15 = 0$ voidaan saattaa muotoon $x = -5$. Kyseessä on y-akselin suuntainen suora.

Yhtälö $5y - 1 = 0$ voidaan saattaa muotoon $y = \frac{1}{5}$. Kyseessä on x-akselin suuntainen suora.

---

* Suorien välinen kulma voidaan laskea myös niin, että määritetään suorien suuntavektorit ja lasketaan niiden välinen kulma pistetulon avulla.

ESIMERKKI 4

Suora kulkee pisteen $(-5, 4)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $3x - 2y - 4 = 0$ kanssa. Muodosta suoran yhtälö.

Ratkaisu

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Määritetään suoran $3x - 2y - 4 = 0$ kulmakerroin saattamalla yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$-2y = -3x + 4 \qquad \big| : (-2)$$

Jaetaan termeittäin.

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{2}$.

Muodostetaan yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-5, 4)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $\frac{3}{2}$.

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - (-5))$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x + 5) \qquad \big| \cdot 2$$

Saatetaan yhtälö muotoon $Ax + By + C = 0$. Poistetaan nimittäjä.

$$2(y - 4) = 3(x + 5)$$

$$2y - 8 = 3x + 15$$

$$-3x + 2y - 23 = 0 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$3x - 2y + 23 = 0$$

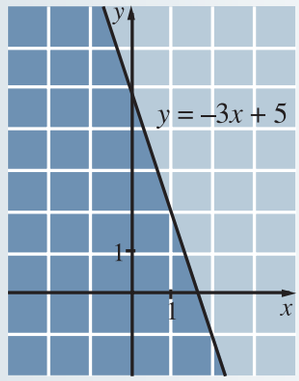
Vastaus

$3x - 2y + 23 = 0$

Kahden muuttujan epäyhtälö

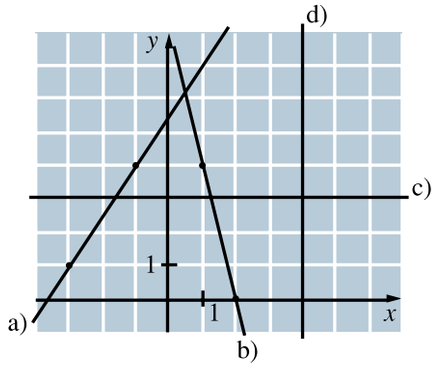
Kahden muuttujan epäyhtälön $Ax + By + C > 0$ (tai < 0) toteuttavat suoran $Ax + By + C = 0$ toisella puolella olevien pisteiden koordinaatit.

Esimerkiksi epäyhtälö $3x + y - 5 \leqslant 0$ voidaan saattaa muotoon $y \leqslant -3x + 5$. Epäyhtälön toteuttavat suoralla $y = -3x + 5$ ja sen alapuolella olevien pisteiden koordinaatit.



Harjoituksia

371. Määritä kuviosta suorien kulmakertoimet.



372. Suora kulkee pisteiden $(-11, -8)$ ja $(-3, 4)$ kautta. Määritä suoran kulmakerroin ja edelleen suoran suuntakulma asteen sadasosien tarkkuudella.

373. Laske kolmen numeron tarkkuudella suorien $y = -\frac{2}{3}x + 11$ ja $y = \frac{1}{2}x - 7$ välisen kulman suuruus.

374. Suora kulkee pisteen $(3, 2)$ kautta. Määritä suoran yhtälö, kun
a) se on x-akselin suuntainen b) se on y-akselin suuntainen c) sen suuntakulma on $-45°$ d) se on yhdensuuntainen suoran $2x - y = 0$ kanssa.
Piirrä suorat.

375. Suora kulkee pisteiden $(-4, -2)$ ja $(5, -5)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö. Anna vastaus sekä ratkaistussa muodossa että muodossa $Ax + By + C = 0$.

376. Suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $3x - 4y + 17 = 0$ kanssa. Määritä suoran yhtälö.

377. Mitkä tason pisteet toteuttavat epäyhtälön $2x - 3y - 6 \leqslant 0$? Piirrä kuvio.

Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmässä on useita muuttujia ja useita yhtälöitä. Yhtälöryhmää ratkaistaessa pyritään eliminoimaan muuttuja eli saamaan yhtälö, jossa jokin muuttuja ei esiinny.

Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarisessa yhtälöryhmässä muuttujien termit ovat ensimmäistä astetta.

Lineaarisesta yhtälöryhmästä voidaan eliminoida muuttuja yhteenlasku- tai sijoitusmenetelmällä.

ESIMERKKI 5

Määritä suorien $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ ja $\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = -1$ leikkauspisteet.

Ratkaisu

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 & \mid \cdot 12 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = -1 & \mid \cdot 6 \end{cases}$$

Poistetaan nimittäjät.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & \mid \cdot 3 \\ 4x - 3y = -6 & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää.* Eliminoidaan y.

$$\begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 8x - 6y = -12 \end{cases}$$

$$17x = 24 \quad \mid : 17$$

$$x = \frac{24}{17}$$

---

* Sijoitusmenetelmää käytettäessä jommastakummasta yhtälöstä ratkaistaan toinen muuttuja ja lauseke sijoitetaan toiseen yhtälöön. Esimerkiksi ensimmäisestä yhtälöstä saatu lauseke $y = -\frac{3}{2}x + 6$ sijoitetaan y:n paikalle toiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & \mid \cdot 4 \\ 4x - 3y = -6 & \mid \cdot (-3) \end{cases}$$

Eliminoidaan x. Toinen tapa olisi sijoittaa $x = \frac{24}{17}$ jompaankumpaan yhtälöön.

$$\begin{cases} 12x + 8y = 48 \\ -12x + 9y = 18 \end{cases}$$

$$17y = 66 \quad \mid : 17$$

$$y = \frac{66}{17}$$

Leikkauspiste on $(\frac{24}{17}, \frac{66}{17}) = (1\frac{7}{17}, 3\frac{15}{17})$.

Vastaus $(\frac{24}{17}, \frac{66}{17}) = (1\frac{7}{17}, 3\frac{15}{17})$

ESIMERKKI 6

Paraabelin akseli on y-akselin suuntainen, ja paraabeli kulkee pisteiden $(-3, 0)$, $(-2, -2)$ ja $(1, 4)$ kautta. Määritä paraabelin yhtälö.

Ratkaisu Jos paraabelin akseli on y-akselin suuntainen (eli paraabeli aukeaa ylöspäin tai alaspäin), paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$.

Pisteiden $(-3, 0)$, $(-2, -2)$ ja $(1, 4)$ koordinaattien tulee toteuttaa paraabelin yhtälö.

$$\begin{cases} a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -2 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

Muodostetaan ensimmäisestä ja kolmannesta yhtälöstä sekä toisesta ja kolmannesta yhtälöstä yhtälöparit, joista eliminoidaan sama muuttuja c.

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \quad \big| \cdot (-1) \qquad \begin{cases} 4a - 2b + c = -2 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \quad \big| \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ -a - b - c = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a - 2b + c = -2 \\ -a - b - c = -4 \end{cases}$$

$$8a - 4b = -4 \qquad 3a - 3b = -6$$

Muodostetaan tuntemattomien a ja b yhtälöpari.

$$\begin{cases} 8a - 4b = -4 \\ 3a - 3b = -6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \big| : 4 \\ \big| : 3 \end{matrix}$$

Yksinkertaistetaan yhtälöitä.

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - b = -2 \end{cases} \quad \big| \cdot (-1)$$

Eliminoidaan b.

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$$

$$a = 1$$

$-1 + b = 2$

$b = 3$

Sijoitetaan $a = 1$ yhtälöön $-a + b = 2$.

$1 + 3 + c = 4$

$c = 0$

Sijoitetaan $a = 1$ ja $b = 3$ yhtälöön $a + b + c = 4$.

Paraabelin yhtälö on $y = x^2 + 3x$.

Vastaus $y = x^2 + 3x$

Leikkauspisteitä

Suoran ja ympyrän leikkauspisteitä ratkaistaessa käytetään sijoitusmenetelmää.

ESIMERKKI 7

Määritä suoran $2x + y + 1 = 0$ ja ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ leikkauspisteet.

Ratkaisu

Muodostetaan yhtälöpari.*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ratkaistaan suoran yhtälöstä y.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan ympyrän yhtälöön y:n paikalle $-2x - 1$.

$$x^2 + (-2x - 1)^2 - 2x - 8(-2x - 1) + 7 = 0 \qquad (-2x - 1)^2 = (2x + 1)^2$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 2x + 16x + 8 + 7 = 0$$

$$5x^2 + 18x + 16 = 0$$

Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = -2 \text{ tai } x = -\frac{8}{5}$$

Kun $x = -2$, niin $y = -2 \cdot (-2) - 1 = 3$.

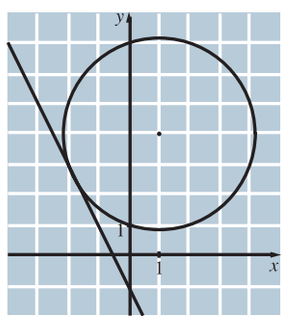
Kun $x = -\frac{8}{5}$, niin $y = -2 \cdot (-\frac{8}{5}) - 1 = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

Vastaus

$(-2, 3)$ ja $(-1\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5})$

---

* Tilanteesta kannattaa piirtää kuvio. Tarkasti piirretystä kuviosta näkee likimääräisesti ongelman vastauksen. Ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ keskipiste on $(1, 4)$ ja säde $\sqrt{10}$. Koska $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$, niin säde $\sqrt{10}$ on ruudukossa kolme askelta eteenpäin ja yksi sivulle.



ESIMERKKI 8

Millä a:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 2x + ay + a - 1 = 0$ esittää ympyrää? Määritä pisteet, joiden kautta kulkee jokainen ympyräparven $x^2 + y^2 - 2x + ay + a - 1 = 0$ ympyrä. Piirrä ympyräparvi.

Ratkaisu

Saatetaan yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2x + ay + a - 1 = 0 \qquad \big| -a + 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 + ay = -a + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -a + 1 + 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + \frac{a}{2})^2 = \frac{1}{4}a^2 - a + 2$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun $\frac{1}{4}a^2 - a + 2 > 0$.

Koska yhtälön $\frac{1}{4}a^2 - a + 2 = 0$ diskriminantti

$D = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 - 2 = -1$ on negatiivinen, lausekkeella $\frac{1}{4}a^2 - a + 2$ ei ole nollakohtia. Koska lausekkeen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, lausekkeen $\frac{1}{4}a^2 - a + 2$ kaikki arvot ovat positiivisia.* Yhtälö esittää ympyrää kaikilla a:n arvoilla.

Käyrien mahdolliset yhteiset pisteet löydetään ratkaisemalla parven kahden ympyrän leikkauspisteet.

Kun $a = 0$, yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$.
Kun $a = 1$, yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

---

* Voidaan myös huomata, että $\frac{1}{4}a^2 - a + 2 = \frac{1}{4}a^2 - a + 1 + 1 = (\frac{1}{2}a - 1)^2 + 1$, joten $\frac{1}{4}a^2 - a + 2 > 0$ kaikilla a.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$-y - 1 = 0$$

$$y = -1$$

Sijoitetaan jommankumman ympyrän yhtälöön, tässä ylempään.

$$x^2 + (-1)^2 - 2x - 1 = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 2$$

Ympyräparven ympyrät $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ leikkaavat pisteissä $(0, -1)$ ja $(2, -1)$.
Tutkitaan, onko jompikumpi piste jokaisella parven ympyrällä.

Sijoitetaan pisteen $(0, -1)$ koordinaatit yhtälöön $x^2 + y^2 - 2x + ay + a - 1 = 0$.

$$0^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 0 + a \cdot (-1) + a - 1 = 0$$
$$1 - a + a - 1 = 0$$
$$0 = 0$$
tosi

Piste $(0, -1)$ on jokaisella parven ympyrällä.

Sijoitetaan pisteen $(2, -1)$ koordinaatit.

$$2^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 2 + a \cdot (-1) + a - 1 = 0$$
$$4 + 1 - 4 - a + a - 1 = 0$$
$$0 = 0$$
tosi

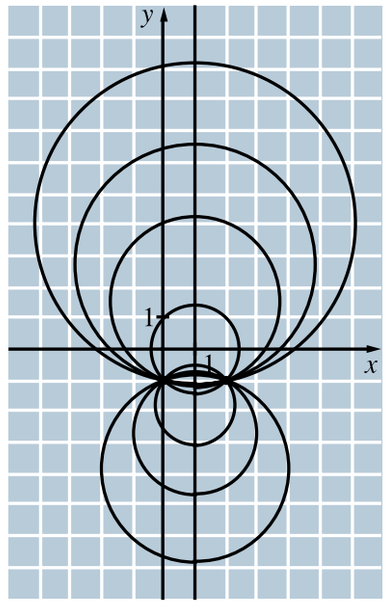
Piste $(2, -1)$ on jokaisella parven ympyrällä.

Jokainen parven ympyrä kulkee pisteiden $(0, -1)$ ja $(2, -1)$ kautta.

Keskipistemuotoisesta yhtälöstä $(x-1)^2+(y+\frac{a}{2})^2=\frac{1}{4}a^2-a+2$ nähdään, että ympyrän $x^2+y^2-2x+ay+a-1=0$ keskipiste on $(1,-\frac{a}{2})$.

Jokainen tätä muotoa oleva piste on suoralla $x=1$, ja kääntäen jokainen suoran $x=1$ piste voidaan ilmaista tässä muodossa.

Parvi muodostuu ympyröistä, joiden keskipiste on suoralla $x=1$ ja jotka kulkevat pisteiden $(0,-1)$ ja $(2,-1)$ kautta.



Vastaus Esittää ympyrää kaikilla a:n arvoilla, kaikki ympyrät kulkevat pisteiden $(0,-1)$ ja $(2,-1)$ kautta.

Harjoituksia

378. Määritä suorien $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ ja $y=x-\frac{1}{2}$ leikkauspiste.

379. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=-2 \\ \frac{3x}{2}+\frac{y}{4}=1. \end{cases}$$

380. Missä pisteissä suora $x-3y+5=0$ leikkaa ympyrän $x^2+y^2=5$?

381. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ leikkauspisteet.

382. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Suorien kohtisuoruus

Kohtisuoruusehto Suorat, joiden kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2, ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos suorien kulmakertoimien tulo on -1.

$$k_1 k_2 = -1$$

Lisäksi jokainen x-akselin suuntainen suora on kohtisuorassa jokaista y-akselin suuntaista suoraa vastaan.

Esimerkiksi suorat $y = -3x - 5$ ja $y = \frac{1}{3}x + 17$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, koska kulmakertoimien tulo on $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$.

Suora, joka on kohtisuorassa suoraa s vastaan, on suoran s *normaali*. Jos suoran s kulmakerroin on k_1, missä $k_1 \neq 0$, suoran s normaalin kulmakerroin on

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

kulmakertoimen k_1 käänteisluvun vastaluku

Esimerkiksi suoran $y = -\frac{2}{5}x - 1$ jokaisen normaalin kulmakerroin on $\frac{5}{2}$.

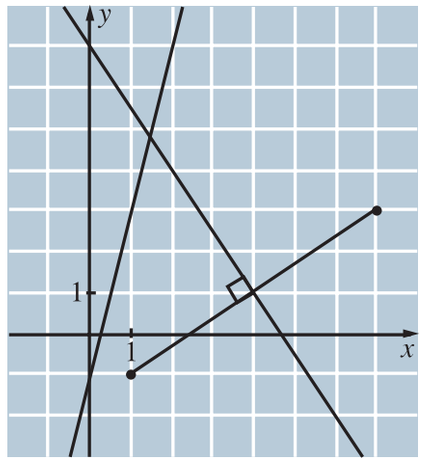
y-akselin suuntaisen suoran $x = 6$ pisteen $(-7, 2)$ kautta kulkeva normaali on x-akselin suuntainen suora $y = 2$.

ESIMERKKI 9

Mikä suoran $4x - y - 1 = 0$ piste on yhtä etäällä pisteistä $(1, -1)$ ja $(7, 3)$?

Ratkaisu

Jokainen piste, joka on yhtä etäällä pisteistä $(1, -1)$ ja $(7, 3)$, on pisteitä yhdistävän janan keskinormaalilla. Määritetään keskinormaalin ja suoran $4x - y - 1 = 0$ leikkauspiste.*



Pisteitä $(1, -1)$ ja $(7, 3)$ yhdistävän janan keskipiste on

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (4, 1).$$

Pisteitä $(1, -1)$ ja $(7, 3)$ yhdistävän janan kulmakerroin on

$$k = \frac{3-(-1)}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Keskinormaalin kulmakerroin on kulmakertoimen $\frac{2}{3}$ käänteisluvun vastaluku $-\frac{3}{2}$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

$$y - 1 = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 7.$$

---

* Toinen tapa ratkaista ongelma on muodostaa kysytyn pisteen koordinaateille yhtälöpari suoran yhtälöstä ja ehdosta, että pisteen etäisyydet (tai suoraan etäisyyksien neliöt) pisteistä $(1, -1)$ ja $(7, 3)$ ovat yhtä suuret:

$$\begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-(-1))^2 = (x-7)^2 + (y-3)^2. \end{cases}$$

Ratkaistaan keskinormaalin ja suoran $4x - y - 1 = 0$ leikkauspisteet.
Yhtälön $4x - y - 1 = 0$ ratkaistu muoto on $y = 4x - 1$.

$$4x - 1 = -\frac{3}{2}x + 7 \qquad \big| \cdot 2$$

$$8x - 2 = -3x + 14$$

$$11x = 16 \qquad \big| : 11$$

$$x = \frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$$

$$y = 4 \cdot \frac{16}{11} - 1 = \frac{53}{11} = 4\frac{9}{11}$$

Yhtälöön $y = 4x - 1$ sijoitetaan $x = \frac{16}{11}$.

Vastaus $(1\frac{5}{11}, 4\frac{9}{11})$

Harjoituksia

383. Suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $3x + 4y + 17 = 0$ vastaan. Määritä suoran yhtälö.

384. Määritä sellainen vakion a arvo, että suora $(a + 1)x + 4y + 3 = 0$ on kohtisuorassa suoraa $2x - 3y + 4 = 0$ vastaan.

385. Piste $(3, -2)$ on ympyrällä $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Määritä pisteen $(3, -2)$ kautta kulkevan ympyrän tangentin yhtälö.

386. Mikä suoran $x + 3y = 1$ piste on lähinnä origoa?

Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $Ax + By + C = 0$ on

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Osoittajassa on lausekkeen $Ax + By + C$ pisteessä (x_0, y_0) saaman arvon itseisarvo. Nimittäjä on suoran yhtälön kertoimien A ja B neliöiden summan neliöjuuri.

ESIMERKKI 10

Laske pisteen $(-4, 1)$ etäisyys suorasta $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Ratkaisu

$y = \frac{1}{2}x - 3$ — Yhtälö saatetaan muotoon $Ax + By + C = 0$.

$\frac{1}{2}x - y - 3 = 0 \quad | \cdot 2$ — Poistetaan nimittäjät.

$x - 2y - 6 = 0$

Etäisyys on

$$d = \frac{|-4 - 2 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

Lausekkeeseen $x - 2y - 6$ sijoitetaan pisteen $(-4, 1)$ koordinaatit. Nimittäjässä on kertoimien 1 ja -2 neliöt.

$$= \frac{|-12|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Vastaus

$\frac{12}{\sqrt{5}} \approx 5{,}4$

Etäisyyskaavan avulla voidaan muun muassa määrittää ympyrän tangentteja.

ESIMERKKI 11

Pisteen $(3, 1)$ kautta piirretään tangentit ympyrälle $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$. Määritä tangenttien yhtälöt.

Ratkaisu

Suora sivuaa ympyrää, jos ja vain jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä on säteen suuruinen. Ympyrän $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$ keskipiste on $(2, 4)$ ja säde $\sqrt{5}$.

Jos suora kulkee pisteen $(3, 1)$ kautta eikä ole y-akselin suuntainen, niin suoran yhtälö on muotoa

$$y - 1 = k(x - 3)$$ Saatetaan yhtälö muotoon $Ax + By + C = 0$.

$$y - 1 = kx - 3k$$

$$kx - y + 1 - 3k = 0.$$

Suoran etäisyyden pisteestä $(2, 4)$ tulee olla $\sqrt{5}$.

$$\frac{|k \cdot 2 - 4 + 1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \qquad | \cdot \sqrt{k^2 + 1}$$

$$|-k - 3| = \sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}$$ Molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten voidaan korottaa neliöön.

$$(-k - 3)^2 = 5(k^2 + 1) \qquad (-k-3)^2 = (k+3)^2$$

$$k^2 + 6k + 9 = 5k^2 + 5$$

$$4k^2 - 6k - 4 = 0$$ Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$k = 2 \text{ tai } k = -\frac{1}{2}$$

Tangenttien yhtälöt ovat $y - 1 = 2(x - 3)$ ja $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ eli

$$y = 2x - 5 \text{ ja } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Vastaus $y = 2x - 5$ ja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Harjoituksia

387. Laske pisteen $(-1, 3)$ etäisyys suorasta a) $4x - y - 1 = 0$ b) $y = \frac{2}{3}x + 1$.

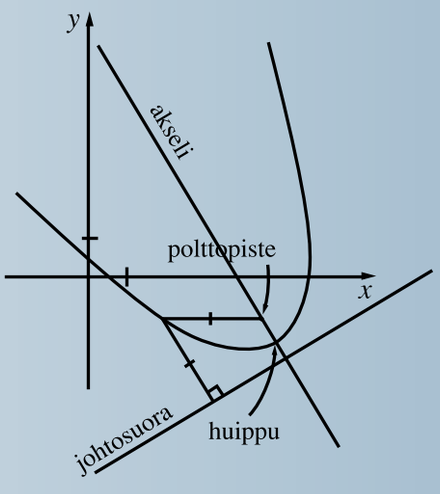
388. Laske ympyrän $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ etäisyys suorasta $x + 2y + 5 = 0$.

389. Osoita, että suora $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ on ympyrän $(x - 1)^2 + y^2 = 10$ tangentti.

Paraabeli

Paraabeli on käyrä, jonka pisteet toteuttavat ehdon:

Piste on yhtä etäällä kiinteästä pisteestä (*polttopisteestä*) ja kiinteästä suorasta (*johtosuorasta*).



Paraabeli on symmetrinen polttopisteen kautta kulkevan johtosuoran normaalin suhteen. Suora on paraabelin *akseli*. Piste, jossa akseli leikkaa paraabelin, on paraabelin *huippu*.

Jos paraabelin akseli on y-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Paraabelin aukeamissuunta riippuu toisen asteen termin kertoimen a merkistä.

Jos paraabelin akseli on x-akselin suuntainen, paraabelin yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$. Paraabelin aukeamissuunta riippuu toisen asteen termin kertoimen a merkistä.

ESIMERKKI 12

Minkä käyrän muodostavat tason pisteet, jotka ovat yhtä etäällä pisteestä $(0, 5)$ ja suorasta $y = 1$? Piirrä käyrä.

Ratkaisu

Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(0, 5)$ on $\sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2}$.

Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $y = 1$ on $|y - 1|$.

Piste (x, y) on yhtä etäällä pisteestä $(0, 5)$ ja suorasta $y = 1$, jos ja vain jos

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} = |y - 1|$$

Molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten yhtälö voidaan korottaa neliöön.

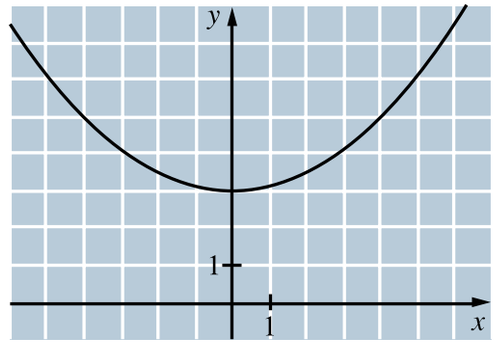
$$x^2 + (y-5)^2 = (y-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 = y^2 - 2y + 1$$

$$-8y = -x^2 - 24 \qquad | : (-8)$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 + 3.$$

Käyrä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka akseli on y-akseli ja jonka huippu on y-akselin pisteessä $(0, 3)$.



Vastaus

paraabelin $y = \frac{1}{8}x^2 + 3$

Harjoituksia

390. Määritä paraabelin $x = -y^2 + 3y + 10$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

391. Määritä paraabelin $y = x^2 + 2x + 1$ ja suoran $3x + y + 5 = 0$ leikkauspisteet.

392. Mitä käyrää yhtälö esittää?

a) $x^2 + 2y - 1 = 0$
b) $x + 2y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
d) $2x + y^2 - 1 = 0$

TEHTÄVIÄ

393. Millä vakion a arvoilla suora $y = x + a$ ei leikkaa paraabelia $y = -\frac{1}{2}x^2$?

394. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 3)$ ja joka sivuaa suoraa $y = 2x + 2$. (Ylioppilaskoe, s. 1980)

395. Mikä pisteiden $(-1, 3)$ ja $(2, -2)$ kautta kulkevan suoran pisteistä on lähinnä origoa?

396. Ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ keskipiste on A, ja ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä B ja C. Laske kulma BAC. (Ylioppilaskoe, s. 1987)

397. Minkä käyrän muodostavat tason pisteet, joiden etäisyys origosta on kolme kertaa niin suuri kuin etäisyys y-akselista?

398. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on 7,50 m ja leveys tienpinnan tasossa 8,10 m. Kuinka korkea, 260 cm leveä rekka-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi keskiviivan oikealla puolella pysyen? (Ylioppilaskoe, s. 1997)

399. Ympyrän säde on $\sqrt{13}$, ja ympyrä kulkee pisteiden $(0, 0)$ ja $(-5, 1)$ kautta. Mikä ympyrän keskipiste on?

400. Tasossa on annettu pisteet $A = (-2, 0)$ ja $B = (2, 3)$. Määritä niiden tason pisteiden $P(x, y)$ joukko, jotka toteuttavat ehdon $|\overline{AP}| \leqslant 2|\overline{BP}|$. Piirrä kuvio. (Ylioppilaskoe, s. 1999)

401. Kolmion kärjet ovat pisteissä $P(-6, 9)$, $Q(2, 1)$ ja $R(6, 3)$. Määritä kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

402. Määritä sen suoran kulmakerroin, joka puolittaa x-akselin ja suoran $y = -2x$ välisen tylpän kulman (tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo). (Ylioppilaskoe, s. 1994)

403. Määritä suoran $3x - y = 0$ pisteet, joiden etäisyys suorasta $3x - 4y + 6 = 0$ on 3.

404. Osoita, että suora $(C^2 + 1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$ kaikilla vakion C arvoilla kulkee kiinteän pisteen kautta. Mikä tämä piste on? Piirrä suoraparvi. (Ylioppilaskoe, s. 1996)

405. Osoita, että kaikilla parven $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 5 - 10a$ ympyröillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Mikä tämä piste on? Piirrä ympyräparven kuva. (Ylioppilaskoe, s. 1991)

406. Kuminauhan toinen päätepiste on koko ajan origossa ja toinen päätepiste liikkuu pitkin paraabelia $y = (x - 3)^2$. Minkä käyrän kuminauhan keskipiste piirtää?

407. Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste. (Ylioppilaskoe, k. 2001)

408. Ympyrä kulkee pisteiden $(3, 1)$ ja $(0, 4)$ kautta ja sivuaa suoraa $2x - y - 6 = 0$. Mikä ympyrän keskipiste on?

409. Tutki, kuinka yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ratkaisujen lukumäärä riippuu vakion a arvosta.

410. Ympyrä liikkuu koordinaatistossa kokoaan muuttaen niin, että se koko ajan kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta ja sivuaa x-akselia. Tutki,
a) minkä käyrän ympyrän keskipiste piirtää
b) minkä käyrän pisteestä $(0, 1)$ alkavan halkaisijan toinen päätepiste piirtää.

411. Osoita, että kaikki parven $y = mx^2 - 2(m-1)x + m - 2$, missä $m \neq 0$, paraabelit kulkevat saman pisteen kautta ja että millään kahdella parven paraabelilla ei ole muita yhteisiä pisteitä. Minkä käyrän paraabelien huiput muodostavat?

412. Mikä on pienin arvo ja mikä suurin arvo, jonka lauseke $x^2 + y^2 - 6x - 2y$ saa epäyhtälön $x^2 + (y-5)^2 \leqslant 4$ määräämässä tasoalueessa?

413. Nelikulmion $ABCD$ kulma A on suora kulma. Sivujen AD ja BC jatkeet leikkaavat pisteessä E ja sivujen AB ja CD jatkeet pisteessä F. Osoita, että janojen AC, BD ja EF keskipisteet ovat samalla suoralla.

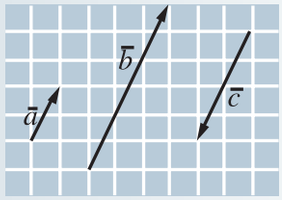
Vektorit

Vektori ja vektorien laskutoimitukset

Vektori

Vektorilla on suunta ja pituus.

Esimerkiksi kuvion vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ovat kaikki keskenään *yhdensuuntaiset*.
Lisäksi vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat *samansuuntaiset*.
Vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ ovat *vastakkaissuuntaiset*.

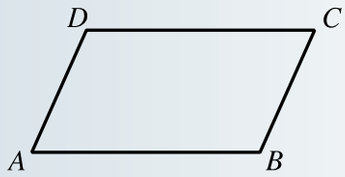


Nollavektorin $\vec{0}$ pituus on nolla. Nollavektorilla ei ole suuntaa.

Kaksi vektoria $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat *sama vektori* eli $\vec{a} = \vec{b}$, jos ne ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset.

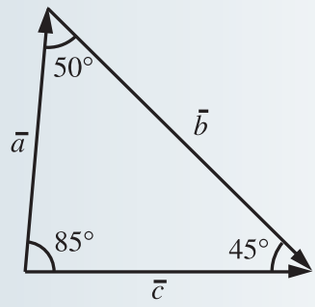
Vektorit, jotka ovat yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset, ovat toistensa *vastavektorit*. Vektorin $\vec{a}$ vastavektori merkitään $-\vec{a}$.

Kuvion nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. Vektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{DC}$ ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset, joten $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Vektorit $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{CB}$ ovat yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset, joten $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$.



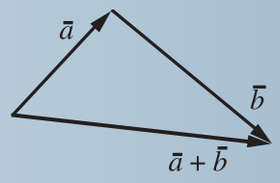
Vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välinen kulma on kulma $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$, joka muodostuu, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä. Kulma merkitään $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Kuvan vektoreille on $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 130°$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 45°$ ja $\sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}) = 85°$.



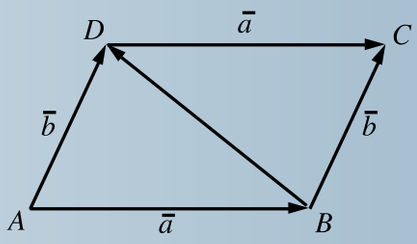
Vektorien summa ja erotus

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ *summa* $\overline{a}+\overline{b}$ muodostetaan siirtämällä $\overline{b}$ alkamaan $\overline{a}$:n loppupisteestä. Summavektorin $\overline{a}+\overline{b}$ alkupiste on $\overline{a}$:n alkupiste ja loppupiste $\overline{b}$:n loppupiste.



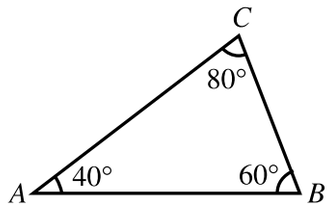
Vektorien *erotus* määritellään summan avulla: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

Kuvion suunnikkaassa $ABCD$ on merkitty $\overline{AB}=\overline{a}$ ja $\overline{AD}=\overline{b}$.
Kulkemalla pisteestä B pisteeseen D pisteen C kautta saadaan:
$\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{b}+(-\overline{a})=\overline{b}-\overline{a}$.
Kulkemalla B:stä D:hen A:n kautta saadaan: $\overline{BD}=\overline{BA}+\overline{AD}=-\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}-\overline{a}$.



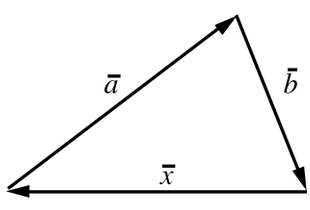
Harjoituksia

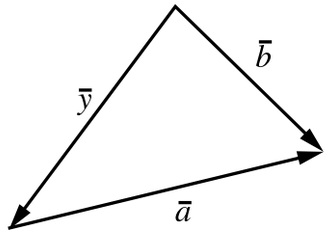
414. Määritä
a) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$
b) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA})$
c) $\sphericalangle(\overline{AC}, \overline{CB})$.



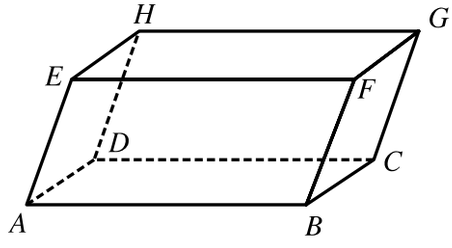
415. Vektorin $\overline{a}$ pituus on 3, ja vektorin $\overline{b}$ pituus on 4. Kuinka pitkä vektori $\overline{a}-\overline{b}$ on, jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat a) samansuuntaiset b) vastakkaissuuntaiset c) toisiaan vastaan kohtisuorassa?

416. Ilmaise vektorit $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.





417. Kuvan suuntaissärmiön kärjestä A alkavat kaksi särmävektoria ovat $\overline{a}=\overline{AB}$ ja $\overline{b}=\overline{AD}$. Kärjestä A alkava avaruuslävistäjävektori on $\overline{d}=\overline{AG}$.
Ilmaise vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{d}$ avulla
a) särmävektori $\overline{AE}$
b) avaruuslävistäjävektori $\overline{HB}$.



Vektorin kertominen luvulla

Vektori $t\bar{a}$

Olkoon t reaaliluku ja $\bar{a}$ vektori.

Jos $t = 0$ tai $\bar{a} = \bar{0}$, niin $t\bar{a} = \bar{0}$.

Jos $t \neq 0$ ja $\bar{a} \neq \bar{0}$, niin vektorin $t\bar{a}$ suunta ja pituus määräytyvät seuraavasti:

Vektorin $t\bar{a}$ suunta. Vektori $t\bar{a}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{a}$ kanssa, ja

- jos t on positiivinen, $t\bar{a}$ on samansuuntainen $\bar{a}$:n kanssa
- jos t on negatiivinen, $t\bar{a}$ on vastakkaissuuntainen $\bar{a}$:n kanssa.

Vektorin $t\bar{a}$ pituus. Vektorin $t\bar{a}$ pituus on $\bar{a}$:n pituus kerrottuna luvun t itseisarvolla:

$|t\bar{a}| = |t||\bar{a}|$.

Jos esimerkiksi vektorin $\bar{a}$ pituus on 8, niin vektori $3\bar{a}$ on $\bar{a}$:n kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on $3 \cdot 8 = 24$. Vektori $-\frac{3}{4}\bar{a}$ on $\bar{a}$:n kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Yksikkövektori

Vektori, jonka pituus on 1, on *yksikkövektori*.

Vektoria, jonka pituus on 1 ja joka on samansuuntainen $\bar{a}$:n kanssa, kutsutaan *$\bar{a}$:n suuntaiseksi yksikkövektoriksi*, ja sitä merkitään $\bar{a}^0$. Yksikkövektori $\bar{a}^0$ saadaan niin, että $\bar{a}$ kerrotaan pituutensa käänteisluvulla.

$$\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$$

Oletetaan esimerkiksi, että vektorin $\bar{a}$ pituus on 12. Vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori on $\bar{a}^0 = \frac{1}{12}\bar{a}$.

Jos on muodostettava vektori $\bar{b}$, joka on samansuuntainen $\bar{a}$:n kanssa ja jonka pituus on 16, niin $\bar{b} = 16\,\bar{a}^0 = 16 \cdot \frac{1}{12}\bar{a} = \frac{4}{3}\bar{a}$.

Jos on muodostettava vektori $\bar{c}$, joka on vastakkaissuuntainen $\bar{a}$:n kanssa ja jonka pituus on 7, niin $\bar{c} = -7\,\bar{a}^0 = -\frac{7}{12}\bar{a}$.

Yhdensuuntaisuuden ja luvulla kertomisen yhteys

Jos $t \neq 0$ ja $\overline{a} \neq \overline{0}$, niin vektori $t\overline{a}$ on yhdensuuntainen $\overline{a}$:n kanssa.

Kääntäen pätee:

Jos vektori $\overline{b}$ on yhdensuuntainen $\overline{a}$:n kanssa, niin on olemassa sellainen luku t, että $\overline{b} = t\overline{a}$.

Jos esimerkiksi $\overline{a}$:n pituus on 12 ja $\overline{d}$ on $\overline{a}$:n kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 3, niin vektorilla $-3\,\overline{a}^0 = -3 \cdot \frac{1}{12}\overline{a} = -\frac{1}{4}\overline{a}$ on sama pituus ja sama suunta kuin $\overline{d}$:llä. Siis $\overline{d} = -\frac{1}{4}\overline{a}$.

Vektorilausekkeilla laskeminen

Vektorilausekkeet sievennetään käyttäen osittelu-, liitäntä- ja vaihdantalakeja.

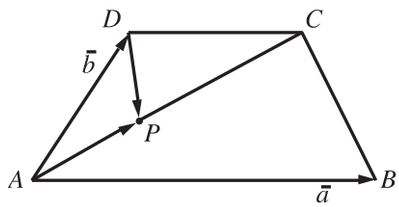
ESIMERKKI 1

Puolisuunnikkaassa $ABCD$ sivun CD pituus on puolet yhdensuuntaisen sivun AB pituudesta. Piste P jakaa lävistäjän AC suhteessa $2 : 3$. Ilmaise vektorit $\overline{AP}$ ja $\overline{DP}$ vektorien $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{AD} = \overline{b}$ avulla.

Ratkaisu

Vektori $\overline{DC}$ on samansuuntainen $\overline{a}$:n kanssa, ja sen pituus on puolet $\overline{a}$:n pituudesta, joten

$$\overline{DC} = \frac{1}{2}\overline{a}.$$



Kulkemalla A:sta C:hen D:n kautta saadaan

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a},$$

joten

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AC} = \frac{2}{5}(\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a}) = \frac{2}{5}\overline{b} + \frac{1}{5}\overline{a}.$$

Kulkemalla D:stä P:hen A:n kautta saadaan

$$\overline{DP} = \overline{DA} + \overline{AP} = -\overline{b} + \frac{2}{5}\overline{b} + \frac{1}{5}\overline{a} = \frac{1}{5}\overline{a} - \frac{3}{5}\overline{b}.$$

Vastaus

$\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{b} + \frac{1}{5}\overline{a}$ ja $\overline{DP} = \frac{1}{5}\overline{a} - \frac{3}{5}\overline{b}$

Harjoituksia

418. Vertaa $\overline{a}$:n suuntaa ja pituutta $\overline{b}$:n $(\overline{b} \neq \overline{0})$ suuntaan ja pituuteen, kun
a) $3\overline{a} - 6\overline{b} = \overline{0}$ b) $-3(\overline{a} - \overline{b}) = -6\overline{a} + \overline{b}$.

419. Vektorin $\overline{a}$ pituus on 5. Määritä a) $\overline{a}$:n suuntainen yksikkövektori
b) $\overline{a}$:n kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 4
c) $\overline{a}$:n kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 7.

420. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset, ja sivu CD on kolme kertaa niin pitkä kuin sivu AB. Piste P jakaa lävistäjän BD pisteestä B lukien suhteessa $2 : 1$. Ilmaise vektorien $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\overline{b} = \overrightarrow{AD}$ avulla a) $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CP}$.

421. Olkoot O, A ja B kolme tason pistettä ja $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\overline{b} = \overrightarrow{OB}$. Olkoon P pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran piste, jolle pätee $|\overrightarrow{PA}| = 3|\overrightarrow{AB}|$ ja joka a) on lähempänä A:ta kuin B:tä b) on lähempänä B:tä kuin A:ta. Ilmaise $\overrightarrow{OP}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

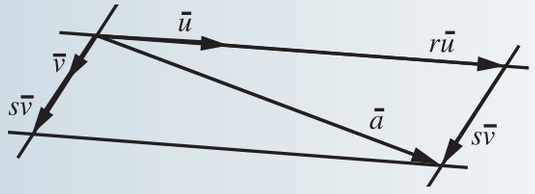
422. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset $(\overline{a} \neq \overline{0}$ ja $\overline{b} \neq \overline{0})$. Osoita, että vektorit $\overline{u} = 2\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{v} = -7\overline{a} + 11\overline{b}$ ja $\overline{w} = 5\overline{a} - 10\overline{b}$ peräkkäin asetettuina muodostavat kolmion.

Vektorin komponentit

Tason vektorin komponenttiesitys

Oletetaan, että vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat erisuuntaiset $(\overline{u} \neq \overline{0},\ \overline{v} \neq \overline{0})$. Tällöin jokainen vektori $\overline{a}$, joka on samassa tasossa niiden kanssa, voidaan ilmaista $\overline{u}$:n kanssa yhdensuuntaisen vektorin ja $\overline{v}$:n kanssa yhdensuuntaisen vektorin summana eli muodossa

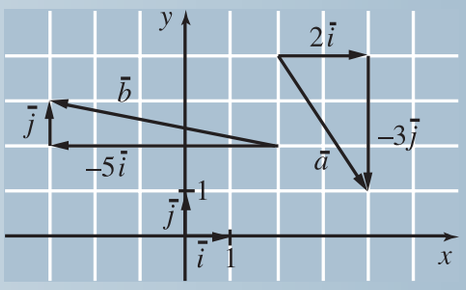
$$\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v}.$$



Tällöin sanotaan, että vektori $\overline{a}$ *on jaettu* $\overline{u}$*:n ja* $\overline{v}$*:n suuntaisiin komponenteihin.*

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyys. Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, eli vektori $\vec{a}$ voidaan jakaa $\vec{u}$:n ja $\vec{v}$:n suuntaisiin komponentteihin vain yhdellä tavalla.

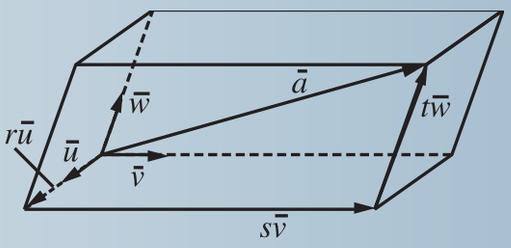
Esimerkiksi jokainen xy-tason vektori voidaan ilmaista yksikäsitteisellä tavalla koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektorien $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ suuntaisten komponenttien avulla. Kuviossa on $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j}$.



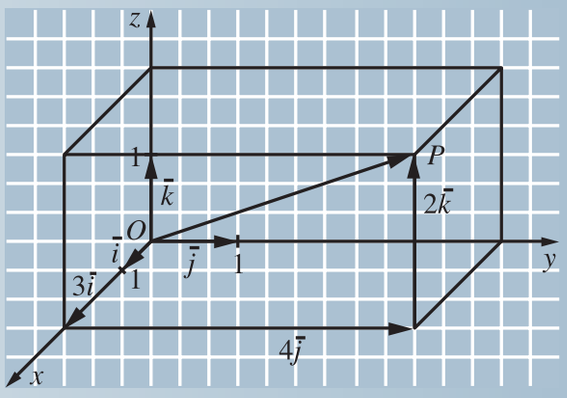
Avaruuden vektorien komponenttiesitys

Oletetaan, että $\vec{u}$, $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ ovat kolme avaruuden vektoria ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ ja $\vec{w} \neq \vec{0}$), jotka eivät kaikki ole saman tason suuntaiset. Tällöin jokainen avaruuden vektori $\vec{a}$ voidaan jakaa yksikäsitteisellä tavalla vektorien $\vec{u}$, $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ suuntaisiin komponentteihin eli ilmaista muodossa

$$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}.$$



Esimerkiksi jokainen xyz-avaruuden vektori voidaan ilmaista yksikäsitteisellä tavalla koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektorien $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ avulla. Kuviossa on $\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.



ESIMERKKI 2

Oletetaan, että vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset ($\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$). Jaa vektori $3\overline{a} - 5\overline{b}$ vektorien $\overline{u} = \overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{v} = \overline{a} - \overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

Ratkaisu

On määritettävä sellaiset luvut r ja s, että

$3\overline{a} - 5\overline{b} = r\overline{u} + s\overline{v}$

$3\overline{a} - 5\overline{b} = r(\overline{a} + \overline{b}) + s(\overline{a} - \overline{b})$ Poistetaan sulkeet.

$3\overline{a} - 5\overline{b} = r\overline{a} + r\overline{b} + s\overline{a} - s\overline{b}$ Yhdistetään $\overline{a}$:n termit ja $\overline{b}$:n termit.

$3\overline{a} - 5\overline{b} = (r + s)\overline{a} + (r - s)\overline{b}$.

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten yhtälössä $\overline{a}$:n kertoimet ovat yhtä suuret ja $\overline{b}$:n kertoimet ovat yhtä suuret.

$$\begin{cases} r + s = 3 \\ r - s = -5 \end{cases}$$

$2r = -2 \quad | : 2$

$r = -1$

$-1 + s = 3 \quad r + s = 3$

$s = 4$

Siis $3\overline{a} - 5\overline{b} = -\overline{u} + 4\overline{v}$.*

Vastaus

$3\overline{a} - 5\overline{b} = -\overline{u} + 4\overline{v}$

Komponentteihin jaettujen vektorien yhdensuuntaisuus

Komponenttien avulla ilmaistujen vektorien yhdensuuntaisuuden tutkiminen perustuu komponenttiesityksen yksikäsitteisyyteen.

Oletetaan, että vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat erisuuntaiset ($\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$). Tutkitaan esimerkiksi, ovatko vektorit $\overline{a} = -12\overline{u} + 30\overline{v}$ ja $\overline{b} = 10\overline{u} - 25\overline{v}$ yhdensuuntaiset.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että $\overline{a} = t\overline{b}$ eli $-12\overline{u} + 30\overline{v} = 10t\overline{u} - 25t\overline{v}$.
Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyden nojalla yhtälö toteutuu, kun

$$\begin{cases} 10t = -12 \\ -25t = 30. \end{cases}$$

* Tarkistetaan: $-\overline{u} + 4\overline{v} = -(\overline{a} + \overline{b}) + 4(\overline{a} - \overline{b}) = -\overline{a} - \overline{b} + 4\overline{a} - 4\overline{b} = 3\overline{a} - 5\overline{b}$.

Ensimmäinen yhtälö toteutuu, kun $t = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5}$. Toinen yhtälö toteutuu, kun $t = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}$. Luku $t = -\frac{6}{5}$ toteuttaa molemmat yhtälöt, joten $\overline{a} = -\frac{6}{5}\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset.

ESIMERKKI 3

Millä vakion r arvoilla xy-tason vektorit $\overline{a} = r\overline{i} - 18\overline{j}$ ja $\overline{b} = 8\overline{i} - r\overline{j}$ ovat vastakkaissuuntaiset?

Ratkaisu

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku $t < 0$, että $\overline{a} = t\overline{b}$.

Ratkaistaan t ja r yhtälöstä $\overline{a} = t\overline{b}$.

$r\overline{i} - 18\overline{j} = t(8\overline{i} - r\overline{j})$ Poistetaan sulkeet.

$r\overline{i} - 18\overline{j} = 8t\overline{i} - rt\overline{j}$ Komponenttiesitys on yksikäsitteinen.

$$\begin{cases} r = 8t \\ -18 = -rt \end{cases}$$ Eliminoidaan r sijoittamalla $r = 8t$ jälkimmäiseen yhtälöön.

$$-18 = -8t \cdot t$$

$$8t^2 = 18$$

$$t^2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$t = \frac{3}{2} \text{ tai } t = -\frac{3}{2}$$

Koska tulee olla $t < 0$, vain juuri $t = -\frac{3}{2}$ kelpaa. Tällöin

$$r = 8t = 8 \cdot (-\frac{3}{2}) = -12.$$

Vastaus

$r = -12$*

---

* Tarkistetaan: Kun $r = -12$, niin $\overline{a} = -12\overline{i} - 18\overline{j}$ ja $\overline{b} = 8\overline{i} + 12\overline{j}$ ja

$$-\frac{3}{2}\overline{b} = -\frac{3}{2}(8\overline{i} + 12\overline{j}) = -\frac{3}{2} \cdot 8\overline{i} - \frac{3}{2} \cdot 12\overline{j} = -12\overline{i} - 18\overline{j} = \overline{a}.$$

Geometriaa vektorien avulla

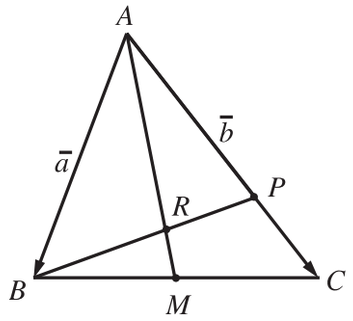
Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyttä voidaan hyödyntää geometristen ongelmien ratkaisemisessa.

ESIMERKKI 4

Piste P jakaa kolmion ABC sivun AC suhteessa $2:1$. Piste R on janan BP ja keskijanan AM leikkauspiste. Missä suhteessa piste R jakaa keskijanan AM?

Ratkaisu

Merkitään $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{AC} = \overline{b}$.



Piste R on sekä janalla AM että janalla BP. Vektori $\overline{AR}$ voidaan ilmaista kahdella tavalla $\overline{a}$:n ja $\overline{b}$:n avulla.

Koska piste R on keskijanalla AM, niin vektori $\overline{AR}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AM}$ kanssa. On siis olemassa sellainen luku s, että $\overline{AR} = s\overline{AM}$. Tällöin

$$\overline{AR} = s\overline{AM} = s(\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}) = s(\overline{a} + \frac{1}{2}(-\overline{a} + \overline{b})) = s(\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b})$$

$$= \frac{1}{2}s\overline{a} + \frac{1}{2}s\overline{b}.$$

Koska piste R on janalla BP, niin on olemassa sellainen luku t, että $\overline{BR} = t\overline{BP}$. Tällöin

$$\overline{AR} = \overline{a} + t\overline{BP} = \overline{a} + t(\overline{BA} + \frac{2}{3}\overline{AC}) = \overline{a} + t(-\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b}) = \overline{a} - t\overline{a} + \frac{2}{3}t\overline{b}$$

$$= (1 - t)\overline{a} + \frac{2}{3}t\overline{b}.$$

Vektori $\overline{AR}$ on jaettu kahdella tavalla $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n suuntaisiin komponentteihin. Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyden perusteella saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s = 1 - t & \mid \cdot 2 \\ \frac{1}{2}s = \frac{2}{3}t & \mid \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 2 - 2t \\ 3s = 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s + 2t = 2 & \mid \cdot 2 \\ 3s - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s + 4t = 4 \\ 3s - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rll} 5s & = 4 & \mid : 5 \\ s & = \frac{4}{5} & \text{Jakosuhteen määrittämiseksi riittää, että ratkaistaan } s. \end{array}$$

Koska $\overline{AR} = \frac{4}{5}\overline{AM}$, piste R jakaa keskijanan AM suhteessa $4 : 1$.

Vastaus suhteessa $4 : 1$

Harjoituksia

423. Esitä vektori $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ kantavektorien $\bar{e}_1 = \bar{i} + \bar{j}$ ja $\bar{e}_2 = \bar{i} + 2\bar{j}$ avulla.
(Ylioppilaskoe, k. 1985)

424. Tutki, ovatko xy-tason vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ yhdensuuntaiset.

a) $\bar{a} = 45\bar{i} - 75\bar{j}$ ja $\bar{b} = 30\bar{i} - 40\bar{j}$

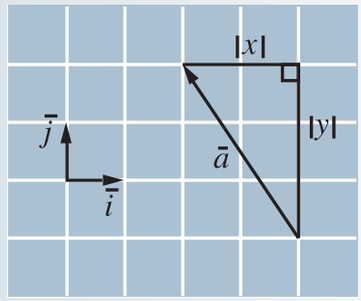
b) $\bar{a} = \frac{4}{3}\bar{i} - \frac{5}{6}\bar{j}$ ja $\bar{b} = -\frac{2}{5}\bar{i} + \frac{1}{4}\bar{j}$

425. Millä k:n arvoilla xy-tason vektorit $\bar{a} = k\bar{i} - 9\bar{j}$ ja $\bar{b} = 22\bar{i} + 12\bar{j}$ ovat
a) yhdensuuntaiset b) samansuuntaiset c) vastakkaissuuntaiset?

Koordinaatiston vektorit

xy-tason vektorit

Vektorin $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$ pituuden laskeminen perustuu Pythagoraan lauseeseen.



$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Määritetään esimerkiksi vektorin $\bar{a} = -7\bar{i} + 24\bar{j}$ pituus, $\bar{a}$:n suuntainen yksikkövektori ja $\bar{a}$:n kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 15. Vektorin $\bar{a}$ pituus on $|\bar{a}| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

Vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{1}{25}(-7\bar{i} + 24\bar{j}),$$

ja vektorin $\bar{a}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 15, on

$$15\bar{a}^0 = 15 \cdot \frac{1}{25}(-7\bar{i} + 24\bar{j}) = \frac{3}{5}(-7\bar{i} + 24\bar{j}).$$

Pisteen P *paikkavektori* on vektori $\overline{OP}$, jonka alkupiste on origo O ja loppupiste P. Pisteen $P(x, y)$ paikkavektori on

$$\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Pisteen $P = (9, -11)$ paikkavektori on $\overline{OP} = 9\bar{i} - 11\bar{j}$. Jos pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = -19\bar{i} - 35\bar{j}$, niin $A = (-19, -35)$.

Pisteestä $A(x_1, y_1)$ alkava ja pisteeseen $B(x_2, y_2)$ päättyvä vektori on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}.$$

Lausekkeessa

- $\bar{i}$:n kerroin on loppupisteen ja alkupisteen x-koordinaattien erotus
- $\bar{j}$:n kerroin on loppupisteen ja alkupisteen y-koordinaattien erotus.

Jos $A = (-12, 19)$ ja $B = (-26, 1)$, niin
$\overline{AB} = (-26 - (-12))\bar{i} + (1 - 19)\bar{j} = -14\bar{i} - 18\bar{j}$.

Vektorin $\overline{AB}$ pituus on sama kuin janan AB pituus.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

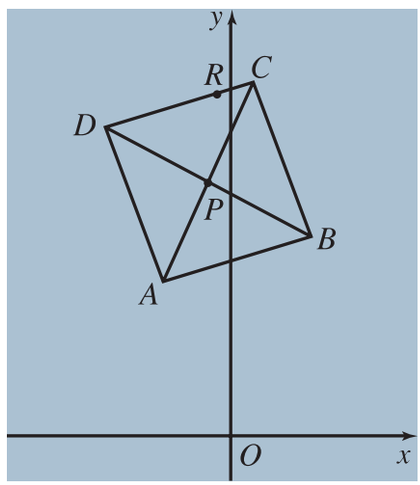
Geometrisissa ongelmissa piste voidaan usein määrittää niin, että määritetään pisteen paikkavektori.

ESIMERKKI 5

Suunnikkaassa $ABCD$ on $A = (-7, 16)$ ja $B = (8, 24)$. Suunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä $P(-2, 29)$. Määritä kärkipisteet C ja D ja sivun CD piste R, jonka etäisyys pisteestä C on 5.

Ratkaisu

Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.



Määritetään pisteen C paikkavektori kulkemalla origosta C:hen A:n kautta.

$$\overline{AP} = (-2 - (-7))\bar{i} + (29 - 16)\bar{j} = 5\bar{i} + 13\bar{j}$$

ja

$$\overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{AP} = -7\bar{i} + 16\bar{j} + 2(5\bar{i} + 13\bar{j})$$
$$= 3\bar{i} + 42\bar{j}.$$

Siis $C = (3, 42)$.

Määritetään pisteen D paikkavektori kulkemalla origosta D:hen C:n kautta.

$$\overline{CD} = \overline{BA} = (-7 - 8)\bar{i} + (16 - 24)\bar{j} = -15\bar{i} - 8\bar{j}$$

ja

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = 3\bar{i} + 42\bar{j} + (-15\bar{i} - 8\bar{j}) = -12\bar{i} + 34\bar{j}.$$

Siis $D = (-12, 34)$.

Vektori $\overline{CR}$ on vektorin $\overline{CD}$ suuntainen vektori, jonka pituus on 5. Vektorin $\overline{CD}$ pituus on

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17,$$

joten

$$\overline{CR} = \frac{5}{17}\overline{CD} = \frac{5}{17}(-15\bar{i} - 8\bar{j}) = -\frac{75}{17}\bar{i} - \frac{40}{17}\bar{j}$$

ja

$$\overline{OR} = \overline{OC} + \overline{CR} = 3\bar{i} + 42\bar{j} + (-\frac{75}{17}\bar{i} - \frac{40}{17}\bar{j}) = -\frac{24}{17}\bar{i} + \frac{674}{17}\bar{j}.$$

Siis $R = (-\frac{24}{17}, \frac{674}{17}) = (-1\frac{7}{17}, 39\frac{11}{17})$.

Vastaus $C = (3, 42)$, $D = (-12, 34)$ ja $R = (-1\frac{7}{17}, 39\frac{11}{17})$

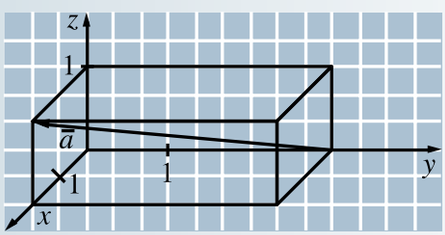
xyz-avaruuden vektorit

Vektorin $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituuden laskukaava perustuu suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden kaavaan.

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Esimerkiksi vektorin $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}7.$$



Vektori pisteestä $A(x_1, y_1, z_1)$ pisteeseen $B(x_2, y_2, z_2)$ on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

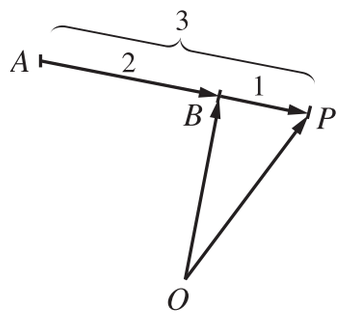
Kantavektorien kertoimet saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

ESIMERKKI 6

Määritä pisteiden $A(-3, 7, 2)$ ja $B(5, 1, -8)$ kautta kulkevalta suoralta janan AB ulkopuolelta piste P, jonka etäisyys pisteestä A on kolme kertaa niin suuri kuin etäisyys pisteestä B.

Ratkaisu

Janojen AP ja BP pituuksien suhdeluvut ovat 3 ja 1, joten janan AB pituuden suhdeluku on 2. Siis $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.



Koska

$$\overline{AB} = (5 - (-3))\bar{i} + (1 - 7)\bar{j} + (-8 - 2)\bar{k} = 8\bar{i} - 6\bar{j} - 10\bar{k},$$

niin

$$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = 5\bar{i} + \bar{j} - 8\bar{k} + \frac{1}{2}(8\bar{i} - 6\bar{j} - 10\bar{k})$$
$$= 5\bar{i} + \bar{j} - 8\bar{k} + 4\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k} = 9\bar{i} - 2\bar{j} - 13\bar{k}.$$

Siis $P = (9, -2, -13)$.

Vastaus

$P = (9, -2, -13)$

Harjoituksia

426. Laske vektorien $\bar{b}$ ja $2\bar{a} - 3\bar{b}$ pituudet, kun $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$.

427. Suunnikkaan $OABC$ kärki O on origossa, ja $\overline{OB} = 30\bar{i} - 10\bar{j}$ ja $\overline{AC} = 18\bar{i} + 4\bar{j}$. Määritä suunnikkaan kärkipisteet A, B ja C.

428. Olkoon $A = (-1, 4)$ ja $B = (-9, 10)$. Pisteestä A siirrytään viisi yksikköä vektorin $\overline{BA}$ suuntaisesti. Mihin pisteeseen tullaan?

429. Olkoon $A = (-7, 13, -1)$ ja $B = (-12, 9, 2)$. Muodosta vektori $\overline{AB}$ ja laske sen pituus.

430. Raketti kulki tasaisella nopeudella suuntaansa muuttamatta ja oli eräällä hetkellä pisteessä $A = (7, -9, 13)$ ja tuntia myöhemmin pisteessä $B = (-3, 6, -1)$. Missä pisteessä raketti oli ollut kaksi tuntia ennen saapumistaan pisteeseen A?

431. Laske pisteen $(-6, 3, -4)$ etäisyys a) xy-tasosta b) xz-tasosta c) x-akselista d) z-akselista.

Suora ja taso

Suora

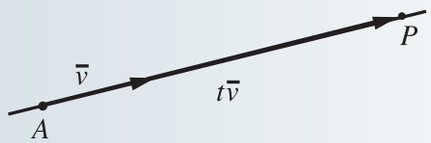
Suora on täysin määrätty, jos tunnetaan yksi suoran piste A ja jokin suoran suuntainen vektori eli suoran *suuntavektori* $\bar{v}$.

Esimerkiksi pisteiden $A = (-1, 3, 6)$ ja $B = (7, -13, 30)$ kautta kulkevan suoran yksi suuntavektori on

$$\overline{AB} = (7 - (-1))\bar{i} + (-13 - 3)\bar{j} + (30 - 6)\bar{k} = 8\bar{i} - 16\bar{j} + 24\bar{k}.$$

Myös jokainen $\overline{AB}$:n kanssa yhdensuuntainen vektori on suoran suuntavektori, esimerkiksi $\frac{1}{8}\overline{AB} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

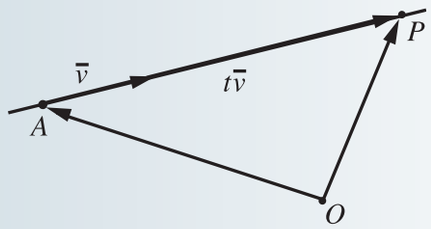
Piste P on suoralla, jos ja vain jos vektori $\overline{AP}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v}$ kanssa eli jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että $\overline{AP} = t\bar{v}$.



Ehto voidaan ilmaista myös ehtona pisteen P paikkavektorille.

Suoran parametrimuotoinen vektoriyhtälö. Piste P on suoralla, joka kulkee pisteen A kautta ja jonka suuntavektori on $\bar{v}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}.$$



ESIMERKKI 7

Onko piste $C = (-9, -21, 26)$ pisteiden $A = (3, 3, 2)$ ja $B = (4, 5, 0)$ kautta kulkevalla suoralla?

Ratkaisu Suoralla on suuntavektori

$$\bar{v} = \overline{AB} = (4 - 3)\bar{i} + (5 - 3)\bar{j} + (0 - 2)\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, joka kulkee pisteen $A(3, 3, 2)$ kautta ja jonka suuntavektori on $\bar{v}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$$

Sijoitetaan pisteiden $P(x, y, z)$ ja $A(3, 3, 2)$ paikkavektorit ja suuntavektori $\bar{v}$.

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k} + t(\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k})$$

Poistetaan sulkeet.

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k} + t\bar{i} + 2t\bar{j} - 2t\bar{k}$$

Yhdistetään kantavektorien kertoimet.

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (3 + t)\bar{i} + (3 + 2t)\bar{j} + (2 - 2t)\bar{k}.$$

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyden nojalla piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, jos ja vain jos*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

Piste $C = (-9, -21, 26)$ on suoralla, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että

$$\begin{cases} -9 = 3 + t \\ -21 = 3 + 2t \\ 26 = 2 - 2t. \end{cases}$$

---

* Yhtälöryhmää kutsutaan *suoran parametrimuotoiseksi koordinaattiyhtälöksi.* Yhtälö on taulukkokirjassa muodossa

$$\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z. \end{cases}$$

Luvut x_0, y_0 ja z_0 ovat suoralla olevan pisteen $P_0(x_0, y_0, z_0)$ koordinaatit, tässä siis pisteen $A(3, 3, 2)$ koordinaatit 3, 3 ja 2. Luvut s_x, s_y ja s_z ovat kantavektorien kertoimet suuntavektorissa $\bar{s} = s_x\bar{i} + s_y\bar{j} + s_z\bar{k}$, tässä siis vektorin $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ kertoimet 1, 2 ja -2.

Tutkitaan, onko yhtälöryhmällä ratkaisu t. Ensimmäisestä yhtälö toteutuu, kun $t = -12$. Sijoitetaan $t = -12$ toiseen ja kolmanteen yhtälöön.

$$\begin{aligned} -21 &= 3 + 2 \cdot (-12) \\ -21 &= 3 - 24 \\ -21 &= -21 \\ &\text{tosi} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 26 &= 2 - 2 \cdot (-12) \\ 26 &= 2 + 24 \\ 26 &= 26 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Luku $t = -12$ toteuttaa kaikki kolme yhtälöä. Siis piste C on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla.

Vastaus On.

ESIMERKKI 8

Suora L_1 kulkee pisteen $A = (-1, 0, 4)$ kautta ja suoralla on suuntavektori $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Suora L_2 kulkee pisteen $B = (3, 2, -5)$ kautta ja suoralla on suuntavektori $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$. Leikkaavatko suorat L_1 ja L_2 toisensa?

Ratkaisu Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla L_1, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku s, että $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{u}$ eli

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = -\vec{i} + 4\vec{k} + s(-\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = -\vec{i} + 4\vec{k} - s\vec{i} + 3s\vec{j} + s\vec{k}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (-1 - s)\vec{i} + 3s\vec{j} + (4 + s)\vec{k}.$$

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyden nojalla saadaan yhtälöryhmä.

Tulee siis olla

$$\begin{cases} x = -1 - s \\ y = \quad 3s \\ z = \quad 4 + s. \end{cases}$$

Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla L_2, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että $\overline{OP} = \overline{OB} + t\overline{v}$ eli

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k} + t(2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k})$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k} + 2t\bar{i} + t\bar{j} - 4t\bar{k}$$

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (3 + 2t)\bar{i} + (2 + t)\bar{j} + (-5 - 4t)\bar{k}.$$

Tulee siis olla

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -5 - 4t. \end{cases}$$

Suorat L_1 ja L_2 leikkaavat toisensa, jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut s ja t, että

$$\begin{cases} -1 - s = 3 + 2t \\ 3s = 2 + t \\ 4 + s = -5 - 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -s - 2t = 4 \\ 3s - t = 2 \\ s + 4t = -9. \end{cases}$$

Ratkaistaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari.

$$\begin{cases} -s - 2t = 4 \\ 3s - t = 2 \end{cases} \qquad \Big| \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} -s - 2t = 4 \\ -6s + 2t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -7s &= 0 \\ s &= 0 \end{aligned}$$

Koska $s = 0$, niin $-6 \cdot 0 + 2t = -4$, joten $t = -2$. Tutkitaan, toteuttavatko luvut $s = 0$ ja $t = -2$ myös kolmannen yhtälön $s + 4t = -9$.

$$\begin{aligned} 0 + 4 \cdot (-2) &= -9 \\ -8 &= -9 \\ &\text{epätosi} \end{aligned}$$

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Suorat eivät leikkaa toisiaan.

Vastaus Eivät leikkaa.

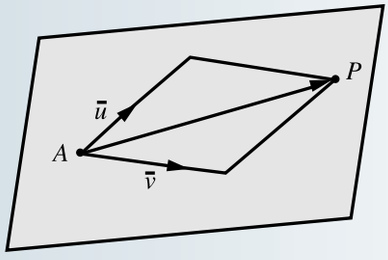
Taso

Taso on täysin määrätty, jos tunnetaan yksi tason piste A ja kaksi keskenään erisuuntaista tason suuntavektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$.

Esimerkiksi pisteiden $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, -3)$ ja $C = (4, 0, -2)$ määräämän tason suuntavektoreita ovat kaikki pisteitä A, B ja C yhdistävät vektorit, esimerkiksi $\bar{u} = \overline{AB} = \bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}$ ja $\bar{v} = \overline{BC} = 4\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$.

Piste P on tasossa, jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut s ja t, että

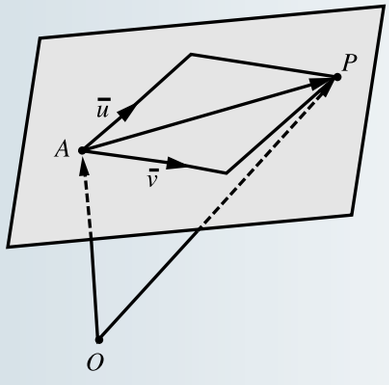
$\overline{AP} = s\bar{u} + t\bar{v}$.



Ehto voidaan ilmaista myös ehtona pisteen P paikkavektorille.

Tason parametrimuotoinen vektoriyhtälö. Piste P on tasossa, joka kulkee pisteen A kautta ja jolla on suuntavektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$, jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut s ja t, että

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v}.$$



ESIMERKKI 9

Taso T sisältää pisteen $A = (3, -1, 1)$, ja tasolla T on suuntavektorit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ja $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

a) Onko piste $B = (3, 2, -4)$ tasossa T?

b) Mitä suoraa pitkin taso T leikkaa xy-tason?

Ratkaisu

a) Piste $P = (x, y, z)$ on tasossa T, jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut s ja t, että

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + s(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + t(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + s\vec{i} + s\vec{j} - s\vec{k} + 2t\vec{i} - t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (3 + s + 2t)\vec{i} + (-1 + s - t)\vec{j} + (1 - s + 2t)\vec{k}.$$

Piste $P = (x, y, z)$ on tasossa T, jos ja vain jos

$$\begin{cases} x = 3 + s + 2t \\ y = -1 + s - t \\ z = 1 - s + 2t. \end{cases}$$

Piste $B = (3, 2, -4)$ on tasossa T, jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut s ja t, että

$$\begin{cases} 3 + s + 2t = 3 \\ -1 + s - t = 2 \\ 1 - s + 2t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s + 2t = 0 \\ s - t = 3 \\ -s + 2t = -5. \end{cases}$$

Ratkaistaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari.

$$\begin{cases} s + 2t = 0 \\ s - t = 3 \end{cases} \qquad \big| \cdot 2$$

$$\begin{cases} s + 2t = 0 \\ 2s - 2t = 6 \end{cases}$$

$$3s = 6 \qquad \big| : 3$$

$$s = 2$$

Koska $2 - t = 3$, niin $t = -1$. Tutkitaan, toteuttavatko luvut $s = 2$ ja $t = -1$ myös kolmannen yhtälön $-s + 2t = -5$.

$$\begin{aligned} -2 + 2 \cdot (-1) &= -5 \\ -4 &= -5 \\ &\text{epätosi} \end{aligned}$$

Piste B ei ole tasossa T.

b) Tason T piste on xy-tasossa, kun

$$\begin{cases} x = 3 + s + 2t \\ y = -1 + s - t \\ 0 = 1 - s + 2t. \end{cases}$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $s = 1 + 2t$. Sijoittamalla ensimmäiseen ja toiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{cases} x = 3 + 1 + 2t + 2t \\ y = -1 + 1 + 2t - t \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = t. \end{cases}$$

Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön $t = y$ saadaan suoran yhtälö $x = 4 + 4y$ eli $x - 4y - 4 = 0$.*

Vastaus a) Ei ole. b) pitkin suoraa $x - 4y - 4 = 0$

* Voidaan myös määrittää kaksi suoran pistettä. Kun $t = 0$, saadaan piste $(4, 0)$, ja kun $t = 1$, saadaan piste $(8, 1)$. Määritetään siis pisteiden $(4, 0)$ ja $(8, 1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

Harjoituksia

432. Määritä pisteiden $A = (2, -1, 0)$ ja $B = (3, 1, 3)$ kautta kulkevan suoran jokin suuntavektori.

433. a) Määritä xy-tason suoran $y = -\frac{1}{2}x + 3$ jokin suuntavektori.

b) xy-tason suoralla on suuntavektori $\vec{i} + 4\vec{j}$. Mikä suoran kulmakerroin on?

434. Suora kulkee origon $O = (0, 0, 0)$ kautta, ja suoralla on suuntavektori $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Millä ehdolla piste $P = (x, y, z)$ on suoralla? Tutki, ovatko pisteet $(3, 6, 10)$ ja $(-2, -4, -6)$ suoralla.

435. Määritä pisteiden $A = (3, -2, 0)$, $B = (1, 1, 2)$ ja $C = (0, 3, -2)$ määräämän tason kaksi keskenään erisuuntaista suuntavektoria.

Pistetulo

Pistetulon määritelmä. Vektoreiden $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ja $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ *pistetulo* on

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Pistetulon arvo on $\vec{i}$:n kertoimien tulon, $\vec{j}$:n kertoimien tulon ja $\vec{k}$:n kertoimien tulon summa.

Esimerkiksi vektoreiden $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$ ja $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = -4 - 6 = -10$.

xy-tason vektoreilla $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ja $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ on $\vec{k}$:n kerroin nolla, joten $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Pistetulo ja kohtisuoruus. Vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$) ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Esimerkiksi vektorit $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ja $\vec{v} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, sillä $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = 0$.

Eräs xy-tason vektoria $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ vastaan kohtisuora vektori on $\bar{b} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$, sillä $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 0$. Yleisesti xy-tason vektorilla $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$ on normaalivektori $\bar{b} = y\bar{i} - x\bar{j}$, joka saadaan $\bar{a}$:sta vaihtamalla keskenään $\bar{i}$:n ja $\bar{j}$:n kertoimet ja muuttamalla samalla toisen kertoimen merkki.

Pistetulon geometrinen tulkinta. Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ($\bar{a} \neq \bar{0}$ ja $\bar{b} \neq \bar{0}$) pistetulo on $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n pituuksien tulo kerrottuna $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n välisen kulman kosinilla.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

Erityisesti on

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

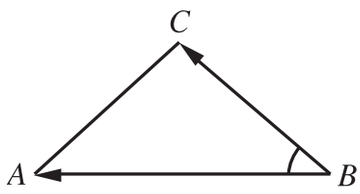
Vektorien välisen kulman kosini on vektorien pistetulo jaettuna vektoreiden pituuksien tulolla.

ESIMERKKI 10

Kolmion ABC kärjet ovat pisteissä $A = (3, -1, 5)$, $B = (0, 1, 5)$ ja $C = (1, 2, 4)$. Laske kolmion kulman B suuruus kolmen numeron tarkkuudella.

Ratkaisu

Kolmion kulma B on kärjestä B alkavien sivuvektorien $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ välinen kulma.



Muodostetaan sivuvektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ ja lasketaan niiden pistetulo ja pituudet.

$$\overline{BA} = (3 - 0)\bar{i} + (-1 - 1)\bar{j} + (5 - 5)\bar{k} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$$

$$\overline{BC} = (1 - 0)\bar{i} + (2 - 1)\bar{j} + (4 - 5)\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 1$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{3}}$$ pistetulo jaettuna pituuksien tulolla

$$\sphericalangle(\overline{BA}, \overline{BC}) \approx 80{,}8°$$

Vastaus 80,8°

Harjoituksia

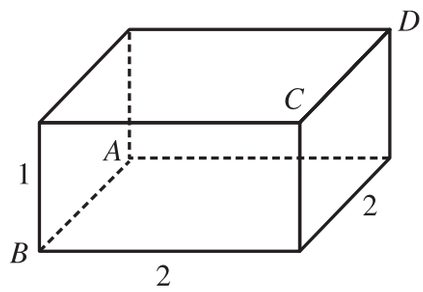
436. Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (10, 0, 1)$, $B = (3, -1, 4)$ ja $C = (4, 7, 9)$. Osoita, että kolmio ABC on suorakulmainen.

437. Olkoon $\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j}$. Määritä a) jokin vektoria $\bar{a}$ vastaan kohtisuora vektori b) vektoria $\bar{a}$ vastaan kohtisuorat yksikkövektorit.

438. Kolmiossa ABC on $\overline{AB} = 3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$ ja $\overline{AC} = -\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella kolmion kulman C suuruus.

439. Suora L kulkee pisteiden $(-1, 4, 3)$ ja $(3, 1, 1)$ kautta. Laske kolmen numeron tarkkuudella
a) suoran L ja y-akselin välisen kulman suuruus
b) suoran L ja xz-tason välisen kulman suuruus.

440. Kuvion suorakulmaisen särmiön pohja on neliö, jonka sivujen pituus on 2, ja särmiön korkeus on 1. Laske vektorien avulla kolmen numeron tarkkuudella avaruuslävistäjien AC ja BD välinen kulma.



TEHTÄVIÄ

441. Yksikkövektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä vektorin $\bar{c}$ pituus, kun $\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} = \bar{0}$. (Ylioppilaskoe, k. 1989)

442. Vektorin $\bar{u} = \overline{AB}$ alkupiste $A = (2, 3)$, vektorin $\bar{u}$ suunta on sama kuin vektorin $\bar{v} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, ja vektorin $\bar{u}$ pituus on 3. Määritä piste B. (Ylioppilaskoe, k. 1992)

443. Jaa vektori $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran $3x - y + 2 = 0$ suuntainen.
(Ylioppilaskoe, k. 1983)

444. Suunnikkaan $ABCD$ kolme kärkipistettä ovat $A = (1, 0, -3)$, $B = (3, 3, 2)$ ja $C = (4, -2, 4)$. Määritä suunnikkaan kärkipiste D ja laske kolmen numeron tarkkuudella suunnikkaan lävistäjien välisen terävän kulman suuruus.

445. Osoita, että pisteiden $(3, 5, -2)$ ja $(5, 4, 1)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $(4, -1, 2)$, $(6, -3, 0)$ ja $(8, -2, -1)$ kautta kulkevaa tasoa vastaan.

446. Pisteestä $A = (1, 1)$ ja $B = (-1, 2)$ piirretään vektorit suoralla $y = x + 1$ olevaan pisteeseen P. Määritä P siten, että vektorit $\overline{AP}$ ja $\overline{BP}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
(Ylioppilaskoe, s. 1988)

447. Piste P on suunnikkaan $ABCD$ sivun CD keskipiste ja piste Q jakaa lävistäjän BD suhteessa $1 : 2$. Osoita, että janat AP ja CQ ovat yhdensuuntaiset.

448. Vektorit $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ ja $\bar{b} = -2\bar{i} - 3\bar{j}$ ovat kolmion kahtena sivuna. Määritä niiden yhteisestä alkupisteestä piirretyn korkeusjanan pituus. (Ylioppilaskoe, s. 1991)

449. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1)$. Piirrä kuva kolmiosta xyz-koordinaatistoon. Kuinka suuri on kolmion pinta-ala? (Ylioppilaskoe, k. 1995)

450. Vektorin $\overline{OP} = (2\bar{i} + \bar{j}) + t(-\bar{i} + 3\bar{j})$ alkupiste on origossa. Millä t:n arvolla vektorin loppupiste P on pisteiden $A(-2, 2)$ ja $B(4, 4)$ kautta kulkevalla suoralla?

451. Esitä muodossa $Ax + By + C = 0$ se suora, jonka origosta alkava vektori $2\bar{i} - \bar{j} + t(\bar{i} + 2\bar{j})$ piirtää, kun t saa kaikki reaaliarvot.
(Ylioppilaskoe, s. 1993)

452. Pisteestä $P_1 = (10, 0, 0)$ lähetetään valonsäde suuntaan $\bar{v}_1 = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$ ja pisteestä $P_2 = (310, 480, 400)$ suuntaan $\bar{v}_2 = -4\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k}$. Kohtaavatko valonsäteet toisensa? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

453. Kolmion ABC sivun AB jatkeelta erotetaan sivun AB pituinen jana BD. Missä suhteessa kolmion ABC kärjestä A piirretyn mediaanin jatke jakaa janan CD?

454. Olkoon $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{i} + \bar{j}$ ja $\bar{c} = d\bar{i} + (d + 1)\bar{j}$. Onko sellaisia reaalilukuja d, joilla vektorit $\bar{a} + \bar{c}$ ja $\bar{b} + \bar{c}$ ovat samansuuntaiset? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

455. Kulman kärki on pisteessä $(1, 2)$, ja pisteet $(4, 6)$, $(13, -3)$ sijaitsevat sen kyljillä. Laske kulman puolittajan suuntainen yksikkövektori. (Ylioppilaskoe, k. 2000)

456. Suora kulkee pisteiden $A = (3, 4, -1)$ ja $B = (4, 5, -2)$ kautta. Määritä suoran pisteet, joista pisteitä $C = (0, 3, 0)$ ja $D(-1, 1, 2)$ yhdistävä jana näkyy suorassa kulmassa.

457. Lentokone lähtee nousuun vektorin $-20\bar{i} + 10\bar{j} + 3\bar{k}$ suuntaisesti vaakatasoa kuvaavan xy-tason pisteestä $(1\,500, 2\,000)$. Samassa koordinaatistossa maantietä esittää yhtälö $2x + y = 200$. Millä korkeudella lentokone ylittää maantien? Koordinaatiston pituusyksikkö on 1 m. (Ylioppilaskoe, k. 1990)

458. Suora L kulkee pisteiden $A = (1, 2, 3)$ ja $B = (2, 0, 5)$ kautta. Mikä suoran L piste on lähinnä pistettä $P(0, -2, 1)$? Mikä pisteen P etäisyys suorasta L on?

459. Taso leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 5, 0)$ ja $C = (0, 0, 4)$. Pisteen $P = (0, 0, 1)$ kautta asetetaan tasoa vastaan normaali. Missä pisteessä tämä leikkaa tason? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

460. Suorakulmion piiri on 12, suorakulmion yksi kärki on origossa ja viereiset kärjet positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljännen kärjen kautta piirretään suora, joka leikkaa kohtisuorasti suorakulmion lävistäjän. Osoita, että kaikki näin saadut suorat kulkevat saman pisteen kautta.

461. Neliö $ABCD$ (kärkipisteet vastapäivään lueteltuina) liikkuu koordinaatistossa kokoaan muuttaen niin, että kärkipiste A on koko ajan pisteessä $(0, 1)$ ja kärkipiste B on koko ajan x-akselilla. Mitkä käyrät nelikulmion kärkipisteet C ja D piirtävät?

462. Osoita, että on mahdollista muodostaa tasan yksi nelikulmio, jonka yksi kärki on pisteessä $A = (12, 7, -5)$, toinen (ei välttämättä A:n viereinen) kärki pisteessä $B = (4, 23, 11)$, kolmas kärki pisteessä $C = (-5, 23, -7)$ ja neljäs kärki pisteessä $D = (15, 13, 13)$. Määritä edelleen nelikulmion lävistäjien välisen kulman suuruus ja laske nelikulmion pinta-ala.

Funktion jatkuvuus ja funktion derivaatta

Jatkuvuus

Jatkuvuuden määritelmä

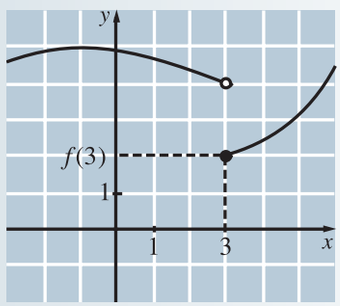
Funktio f on *jatkuva* määrittelyjoukkonsa kohdassa a, jos funktion raja-arvo kohdassa a on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa a eli jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Jos funktio on jatkuva jollain lukusuoran välillä, niin funktion kuvaaja tällä välillä on katkeamaton käyrä.

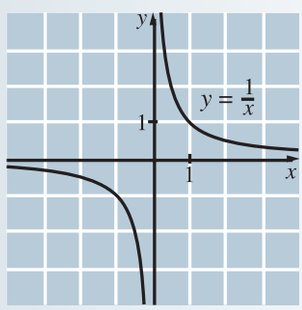
Funktion määrittelyjoukon kohta, jossa funktio ei ole jatkuva, on funktion *epäjatkuvuuskohta.*

Kuvion funktion f kuvaaja katkeaa kohdassa $x = 3$. Kohta kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon $(f(3) = 2)$, joten kohta $x = 3$ on funktion f epäjatkuvuuskohta.*



Funktion $\frac{1}{x}$ kuvaaja katkeaa kohdassa $x = 0$.

Kohta $x = 0$ ei kuitenkaan ole funktion $\frac{1}{x}$ epäjatkuvuuskohta, sillä se ei sisälly funktion f määrittelyjoukkoon.

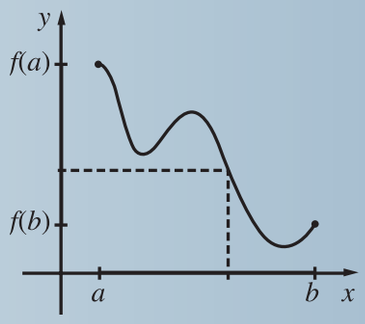


---

* Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 3, sillä kun muuttujan arvot lähenevät kohtaa 3 vasemmalta, funktion arvot eivät lähene lukua $f(3)$. Funktio on niin sanottu paloittain määritelty funktio, joiden jatkuvuuden tutkimiseen on perehdytty syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

Jatkuvan funktion arvot

Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin funktio f saa välillä $]a, b[$ jokaisen arvon, joka on päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä.



Erityisesti:

> Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja jos arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on (ainakin yksi) nollakohta välillä $]a, b[$.

ESIMERKKI 1

Osoita, että yhtälöllä $e^{-x} = x - 2$ on tasan yksi juuri, ja määritä juuren kaksidesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu

Yhtälö $e^{-x} = x - 2$ on yhtäpitävä yhtälön $e^{-x} - x + 2 = 0$ kanssa. Yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = e^{-x} - x + 2$ nollakohtia.

Osoitetaan, että funktiolla f on tasan yksi nollakohta.
Huomataan, että $f(2) \approx 0{,}14 > 0$ ja $f(3) \approx -0{,}95 < 0$. Koska funktio f on jatkuva, niin funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.*

Osoitetaan, että funktiolla f ei ole muita nollakohtia.
Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

Funktion f derivaattafunktio on

$f'(x) = -e^{-x} - 1$.

Koska $e^{-x} > 0$ kaikilla x, niin $f'(x) = -e^{-x} - 1 < -1 < 0$ kaikilla x.

Funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä, joten se saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Siis funktiolla on tasan yksi nollakohta.

---

* Havainnon voi tehdä graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta. Havainto on kuitenkin perusteltava laskemalla funktion arvot.

Määritetään nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo. Lyhennetään väliä, jolla funktio vaihtaa merkkiään.*

$f(2{,}12) \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5} > 0$
$f(2{,}13) \approx -0{,}011 < 0$ Nollakohta on välillä $]2{,}12;\ 2{,}13[$.
$f(2{,}125) \approx -0{,}0056 < 0$

Koska funktion f arvot $f(2{,}12)$ ja $f(2{,}125)$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on nollakohta välillä $]2{,}12;\ 2{,}125[$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $2{,}12$.

Vastaus likiarvo $2{,}12$

Harjoituksia

463. Osoita, että yhtälöllä $x^5 = 200x^3 + 80$ on ainakin yksi juuri välillä $]14,\ 15[$.

464. Osoita, että funktiolla $f(x) = \cos 2x + 3x$ on ainakin yksi nollakohta.

465. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^4 - 3x - 7$ on ainakin kaksi nollakohtaa.

* Hyvän alun haarukoinnille saa esimerkiksi piirtämällä funktion kuvaajan graafisella laskimella ja tarvittaessa lähentämällä kuvaajaa. Kaikkia laskettuja arvoja ei tarvitse kirjata ratkaisuun. Riittää, että kirjataan viimeiset laskut, jotka perustelevat toisen desimaalin.

Derivaatta

Derivaatan määritelmä

Funktion f *erotusosamäärä* kohdassa a on lauseke $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Funktio f on *derivoituva* kohdassa a, jos funktion f erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa a. Raja-arvo on funktion f *derivaatta* kohdassa a, ja se merkitään $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Erotusosamäärä voidaan kirjoittaa myös muodossa $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, jolloin

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ derivaatta kohdassa 1 erotusosamäärän raja-arvona.

Ratkaisu Muodostetaan funktion f erotusosamäärä kohdassa 1 ja määritetään sen raja-arvo kohdassa 1.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}}{x-1} = \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right) : (x-1)$$

$$= \frac{2-(x+1)}{2(x+1)} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{\overset{-1}{\cancel{-x+1}}}{2(x+1)\underset{1}{\cancel{(x-1)}}}$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} \to -\frac{1}{2(1+1)} = -\frac{1}{4}, \text{ kun } x \to 1.$$

Siis $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

Vastaus $-\dfrac{1}{4}$

Derivoiminen

Funktio f', jonka arvo on funktion f derivaatta $f'(x)$ jokaisessa kohdassa x, jossa f on derivoituva, on funktion f *derivaattafunktio*.

Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*.

Tavallisimpien funktioiden derivoimista on kerrattu jo funktioiden kertaamisen yhteydessä.*

Funktiota derivoitaessa tarvitaan myös tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion derivointisääntöjä:

$$\mathrm{D}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Oletetaan esimerkiksi, että derivoituvalle funktiolle f on $f(3) = 4$ ja $f'(3) = -1$. Tällöin funktion $g(x) = x^2 f(x)$ derivaattafunktio on $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$ ja $g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot f(3) + 3^2 \cdot f'(3) = 6 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) = 15$.

Derivaatta ja kuvaajan tangentti

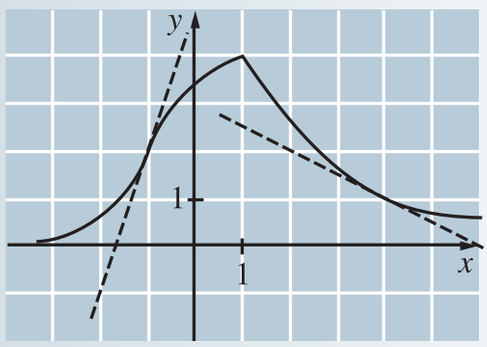
Funktion f derivaatta $f'(a)$ on funktion f kuvaajalle pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Derivaatta ilmaisee, millä nopeudella funktion arvot kasvavat kohdassa a.

Kun esimerkiksi piirretään viereiselle funktion f kuvaajalle tangentit muuttujan arvojen -1 ja 4 kohdalle, nähdään, että

$f'(-1) \approx 3$ ja $f'(4) \approx -\frac{1}{2}$.

Muuttujan arvon 1 kohdalle ei voida piirtää yksikäsitteistä tangenttia, joten funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$.



* Tavallisten funktioiden derivaattafunktiot ovat taulukkokirjassa.

ESIMERKKI 3

Olkoon $f(x) = x\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$.

a) Osoita, että piste $(4, -2)$ on funktion f kuvaajalla, ja määritä pisteeseen $(4, -2)$ piirretyn kuvaajan tangentin yhtälö.

b) Osoita, että funktion f kuvaaja sivuaa pisteessä $(4, -2)$ funktion $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{6}{x-2}$ kuvaajaa.

Ratkaisu

a) Funktion f määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.

Funktion f arvo kohdassa 4 on

$$f(4) = 4\sqrt{4} - 5\sqrt{4} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = -2.$$

Siis piste $(4, -2)$ on funktion f kuvaajalla.

Derivoidaan funktio f.

$$f(x) = x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} \qquad x\sqrt{x} = x^1 x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{D}x^r = rx^{r-1}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Pisteeseen $(4, -2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} - \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{5}{2 \cdot 2} = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}.$$

Tangentin yhtälö on

$$y - (-2) = \frac{7}{4}(x - 4)$$

$$y + 2 = \frac{7}{4}x - 7$$

$$y = \frac{7}{4}x - 9.$$

b) On osoitettava, että myös funktion $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{6}{x-2}$ kuvaaja kulkee pisteen $(4, -2)$ kautta ja että g:n kuvaajalle pisteeseen $(4, -2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin $\frac{7}{4}$.

Koska

$$g(4) = \frac{4}{4} - \frac{6}{4-2} = 1 - 3 = -2,$$

funktion g kuvaaja kulkee pisteen $(4, -2)$ kautta.

Derivoidaan funktio g.

$$g(x) = \frac{x}{4} - \frac{6}{x-2} = \frac{1}{4}x - 6 \cdot \frac{1}{x-2}$$

Saatetaan funktio $\frac{1}{x-2}$ muotoon $f(x)^r$. Toinen tapa on käyttää funktioiden osamäärän derivointikaavaa.

$$= \frac{1}{4}x - 6 \cdot (x-2)^{-1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} - 6 \cdot (-1) \cdot (x-2)^{-2} \cdot \mathrm{D}(x-2)$$

$\mathrm{D}f(x)^r = rf(x)^{r-1}f'(x)$. Tässä $r = -1$.

$$= \frac{1}{4} - 6 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{6}{(x-2)^2}$$

Koska

$$g'(4) = \frac{1}{4} + \frac{6}{(4-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4} = f'(4),$$

funktion g kuvaaja sivuaa funktion f kuvaajaa pisteessä $(4, -2)$.

Vastaus a) $y = \frac{7}{4}x - 9$

Harjoituksia

466. Taulukossa on derivoituvan funktion f arvoja ja derivaattoja. Määritä

a) funktion $g(x) = x^2 f(x)$ derivaatta kohdassa 3

b) funktion $h(x) = f(x)^2$ derivaatta kohdassa 1

c) funktion $u(x) = f(4x)$ derivaatta kohdassa 1

d) funktion $v(x) = f(x^2)$ derivaatta kohdassa 2.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1	1	4
2	3	1
3	4	0
4	2	-1

467. Määritä funktion $f(x) = e^{-2x} - \sin 3x$ kuvaajalle pisteeseen $(0, 1)$ piirretyn a) tangentin b) normaalin kulmakerroin.

468. Määritä funktion $f(x) = 6\sqrt{x} - \ln(3x - 2)$ kuvaajalle pisteeseen $(1, 6)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

469. Määritä funktion $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2$ kuvaajan pisteet, joihin piirretty kuvaajan tangentti on vaakasuora.

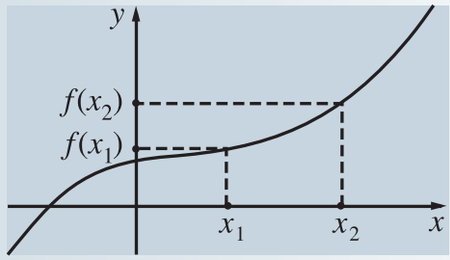
470. Määritä paraabelin $y = 3x^2 + 12x + 5$ huipun x-koordinaatti.

Derivaatta ja funktion kulku

Funktion kasvaminen ja väheneminen

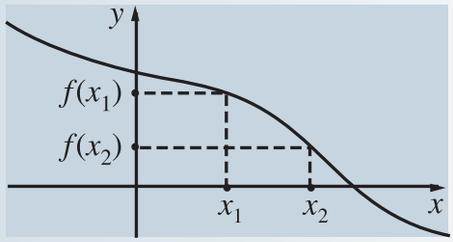
Funktio f on *aidosti kasvava* lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvon suuretessa myös funktion arvot suurenevat eli

jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$.

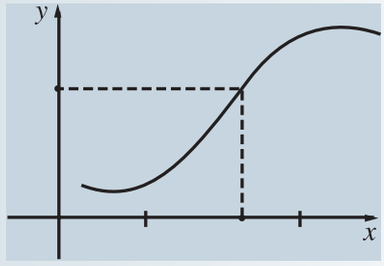


Funktio f on *aidosti vähenevä* lukusuoran välillä, jos tällä välillä muuttujan arvon suuretessa funktion arvot pienenevät eli

jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$.*



Jos funktio f on jollain välillä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä (eli *aidosti monotoninen*), se saa tällä välillä jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.



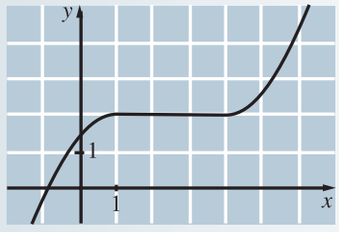
Derivoituvan funktion kasvamista ja vähenemistä voidaan tutkia derivaattafunktion merkin avulla.

Jos $f'(x) \geqslant 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio on tällä välillä aidosti kasvava.

Jos $f'(x) \leqslant 0$ kaikissa välin pisteissä ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä välin pisteissä, niin funktio on tällä välillä aidosti vähenevä.

---

* Funktio f on *kasvava*, jos sille pätee: jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Funktio f on *vähenevä*, jos sille pätee: jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Kuvion funktiolla on vakioarvo välillä $[1, 4]$.
Funktio on kasvava, muttei aidosti kasvava.



Esimerkiksi funktion $f(x) = x^3 + x - 11$ derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 + 1$ on kaikkialla positiivinen, sillä $x^2 \geqslant 0$ kaikilla x. Funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.

Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ derivaattafunktio on

$g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Koska $(x - 1)^2 \geqslant 0$ kaikilla x ja $(x - 1)^2 = 0$ vain kohdassa $x = 1$, funktio g on kaikkialla aidosti kasvava.

Jos jatkuvan funktion kasvamista ja vähenemistä tutkitaan välillä, joka sisältää toisen tai molemmat päätepisteensä (esimerkiksi muotoa $[a, \infty[$ olevalla välillä), niin funktion ei tarvitse olla derivoituva välin päätepisteessä.

Esimerkiksi funktio $f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$ on jatkuva välillä $[0, \infty[$. Koska $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-x} > 0$ kaikilla $x > 0$, funktio f on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan $[0, \infty[$.

Kohdat, joissa funktion kulkusuunta muuttuu, ovat funktion *ääriarvokohtia* (*maksimi-* tai *minimikohtia*), ja funktion arvot näissä kohdissa ovat funktion *ääriarvoja* (*maksimi-* tai *minimiarvoja*.)

ESIMERKKI 4

Tutki, missä funktio $f(x) = 6x^2 - x^3$ on kasvava ja missä vähenevä. Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot.

Ratkaisu Derivoidaan ja määritetään derivaattafunktion merkit.

$f'(x) = 12x - 3x^2$

$12x - 3x^2 = 0$ Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

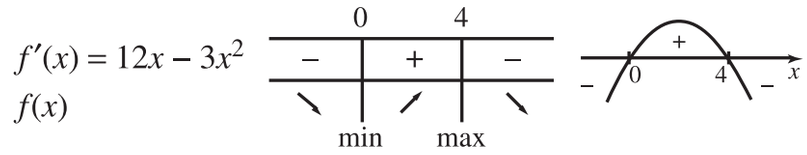
$x(12 - 3x) = 0$

$x = 0$ tai $12 - 3x = 0$

$x = 0$ tai $x = 4$

Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.*



Funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, 4]$ ja aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[4, \infty[$.

Kohta $x = 0$ on minimikohta. Minimiarvo on $f(0) = 0$.

Kohta $x = 4$ on maksimikohta. Maksimiarvo on $f(4) = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32$.

Vastaus aidosti kasvava välillä $[0, 4]$, aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[4, \infty[$; minimikohta 0 ja minimiarvo 0, maksimikohta 4 ja maksimiarvo 32

ESIMERKKI 5

Osoita, että $\sqrt{x} > \ln(1 + x)$ kaikilla $x > 0$.

Ratkaisu Tutkitaan erotusfunktiota $f(x) = \sqrt{x} - \ln(1 + x)$.
Funktio f on määritelty, kun $x \geqslant 0$.

Derivoidaan ja määritetään derivaattafunktion merkit.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1 + x} = \frac{1 + x - 2\sqrt{x}}{2(1 + x)\sqrt{x}}$$

Funktiolla f on derivaatta, kun $x > 0$.

---

* Toinen tapa määrittää derivaattafunktion merkit on laskea yksi derivaattafunktion $f'(x) = 12x - 3x^2$ arvo jokaiselta väliltä $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ ja $]4, \infty[$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$1 + x - 2\sqrt{x} = 0$ Funktion $f'(x)$ arvo on nolla, kun osoittajan arvo on nolla.

$$1 + x = 2\sqrt{x}$$

Koska $x > 0$, yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten yhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön kanssa.

$$(1 + x)^2 = 4x$$

$$1 + 2x + x^2 = 4x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Koska derivaattafunktion $f'(x) = \dfrac{1 + x - 2\sqrt{x}}{2(1 + x)\sqrt{x}}$ nimittäjä on funktion koko määrittelyjoukossa positiivinen, riittää, että selvitetään osoittajan $1 + x - 2\sqrt{x}$ merkit.*

$x = 0{,}5$: $1 + 0{,}5 - 2\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}09 > 0$

$x = 4$: $1 + 4 - 2\sqrt{4} = 1 > 0$

	0		1	
$f'(x)$		+		+
$f(x)$		↗		↗

Kulkukaavion mukaan funktio $f(x) = \sqrt{x} - \ln(1 + x)$ on aidosti kasvava funktion f koko määrittelyjoukossa $[0, \infty[$.

Koska $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ ja koska funktio f on aidosti kasvava joukossa $[0, \infty[$, niin $f(x) > 0$, kun $x > 0$. Siis $\sqrt{x} > \ln(1 + x)$ kaikilla $x > 0$.

---

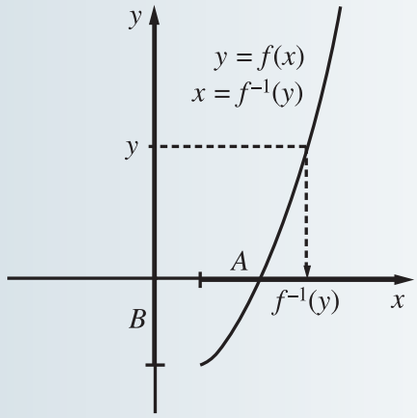
* Arvojen laskemisen sijasta voidaan myös huomata, että $1 + x - 2\sqrt{x} = 1 - 2\sqrt{x} + x = (1 - \sqrt{x})^2$, joten $1 + x - 2\sqrt{x} \geqslant 0$ kaikilla $x > 0$ ja $1 + x - 2\sqrt{x} = 0$ vain, kun $x = 1$.

Käänteisfunktio

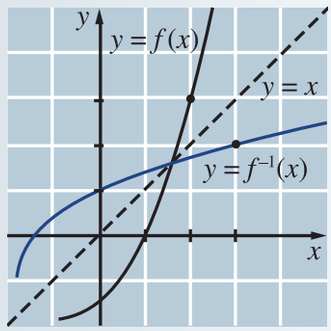
Jos funktio f on koko määrittelyjoukossaan aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, se saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Tällöin funktiolla f on *käänteisfunktio* f^{-1}, joka määritellään:

$f^{-1}(y) = x$, jos ja vain jos $f(x) = y$.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko.



Jos käänteisfunktion muuttujana on x, niin funktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



ESIMERKKI 6

Osoita, että funktiolla $f(x) = e^{-3x+1} - 2$ on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion määrittelyjoukko ja lauseke.

Ratkaisu

Funktion f määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Derivoidaan.

$f'(x) = -3e^{-3x+1}$

Koska kaikilla x on $e^x > 0$, niin $f'(x) < 0$ kaikilla x. Funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä, joten sillä on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko.

Kun $x \to \infty$, niin $-3x + 1 \to -\infty$ ja siis $f(x) = e^{-3x+1} - 2 \to 0 - 2 = -2$.

Kun $x \to -\infty$, niin $-3x + 1 \to \infty$ ja siis $f(x) = e^{-3x+1} - 2 \to \infty$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa jokaisen arvon kahden saamansa arvon välistä. Funktion f arvojoukko ja siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on väli $]-2, \infty[$.

Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} e^{-3x+1} - 2 &= y && f(x) = y \\ e^{-3x+1} &= y + 2 \\ -3x + 1 &= \ln(y + 2) \\ -3x &= \ln(y + 2) - 1 && \mid : (-3) \\ x &= -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3} && x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3}$. Voidaan myös merkitä muuttujaa x:llä, jolloin $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}\ln(x + 2) + \frac{1}{3}$.

Vastaus käänteisfunktion määrittelyjoukko $]-2, \infty[$, $f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3}$

Harjoituksia

471. Osoita, että funktio $f(x) = x^5 + 5x^3 + 2$ on kaikkialla aidosti kasvava.

472. a) Osoita, että funktio $g(x) = e^{-x} - 3x$ on kaikkialla aidosti vähenevä.
b) Olkoon $x_1 = 3 + 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ ja $x_2 = 3 + 1{,}2 \cdot 10^{-12}$. Kumpi luvuista x_1 ja x_2 on suurempi? Kumpi luvuista $g(x_1)$ ja $g(x_2)$ on suurempi?

473. Osoita, että funktio $f(x) = x - \cos x$ on kaikkialla aidosti kasvava.

474. Missä funktio $f(x) = x^2 - 6x$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion f ääriarvot ja ääriarvokohdat.

Funktion suurin ja pienin arvo

Lukusuoran välillä, joka ei sisällä molempia päätepisteitään, funktiolla ei välttämättä ole suurinta ja pienintä arvoa.

Esimerkiksi funktion $f(x) = 6x^2 - x^3$ korkeimman asteen termistä $-x^3$ voidaan päätellä, että $f(x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to -\infty$. Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

Mahdolliset kohdat, joissa funktio voi saada suurimman ja pienimmän arvon, voidaan päätellä funktion kulkukaaviosta.

ESIMERKKI 7

Määritä funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ suurin arvo.

Ratkaisu Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \qquad \mathrm{D}\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$1 - \ln x = 0$ Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$\ln x = 1$

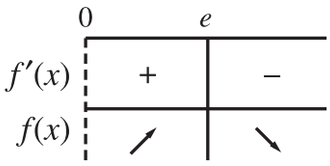
$x = e$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ merkkikaavio.

Koska $x^2 > 0$, osoittaja $1 - \ln x$ määrää derivaatan merkin.

$x = 1$: $1 - \ln 1 = 1 > 0$

$x = e^2$: $1 - \ln e^2 = 1 - 2 = -1 < 0$



Kulkukaavion mukaan funktio f saa suurimman arvon kohdassa $x = e$. Suurin arvo on

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Vastaus $\dfrac{1}{e}$

Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Väli, joka sisältää molemmat päätepisteensä eli joka on muotoa $[a, b]$, on *suljettu väli*.

Ainoat mahdolliset kohdat, joissa derivoituva funktio voi suljetulla välillä saada suurimman ja pienimmän arvon, ovat välin sisällä olevat derivaattafunktion nollakohdat ja välin päätepisteet.

Jos on määritettävä derivoituvan funktion suurin tai pienin arvo suljetulla välillä $[a, b]$, niin kulkukaaviota ei välttämättä tarvita. Voidaan menetellä seuraavasti:

1. Derivoidaan funktio f ja määritetään derivaattafunktion välillä $]a, b[$ olevat nollakohdat.

2. Lasketaan funktion f arvo välillä $]a, b[$ olevissa derivaattafunktion nollakohdissa ja välin päätepisteissä a ja b. Lasketuista arvoista suurin (pienin) on funktion f suurin (pienin) arvo välillä $[a, b]$.

Määritetään esimerkiksi funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ pienin arvo välillä $[1, 4]$. Derivaattafunktion $f'(x) = -3x^2 + 6x = x(-3x + 6)$ nollakohdat ovat 0 ja 2. Välillä $]1, 4[$ on nollakohta 2. Koska $f(2) = 4$, $f(1) = 2$ ja $f(4) = -16$, pienin arvo on -16.

Harjoituksia

475. Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ suurin arvo. Onko funktiolla f pienin arvo?

476. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 8x + 18$
a) suurin arvo välillä $[2, 5]$
b) suurin arvo välillä $[0, 2]$.

477. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$ pienin arvo välillä $[1, 4]$.

TEHTÄVIÄ

478. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit sekä käyrälle $y = \frac{2}{x}$ pisteeseen $(1, 2)$ piirretty normaali.
(Ylioppilaskoe, s. 1985)

479. Osoita, että käyrillä $x^2 - 6x - 3 + 4y = 0$ ja $2x^2 + 1 - y = 0$ on yksi yhteinen piste, jossa ne sivuavat toisiaan, so. niillä on yhteinen tangentti. Määritä tämän tangentin yhtälö.
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

480. Määritä käyrän $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$ tangentit, jotka ovat suoran $8x - 2y - 5 = 0$ suuntaiset.

481. Osoita, että yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria. (Ylioppilaskoe, k. 1981)

482. Määritä funktion $f(x) = xe^{3x}$ arvojoukko.

483. Osoita, että yhtälöllä $\sin 3x = 3x - 2\pi$ on täsmälleen yksi juuri, ja määritä juuren kaksidesimaalinen likiarvo.

484. Määritä käyrän $y = \frac{1}{x-4}$ origon kautta kulkevan tangentin yhtälö.

485. Osoita, että käyrä $y = x(1 + \ln x)$ $(x > 0)$ ei ole missään kohdassa suoran $y = x - e^{-1}$ alapuolella. (Ylioppilaskoe, s. 1991)

486. Määritä funktion $f(x) = |x^3 + 5x^2 + 7x - 6|$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$.

487. Määritä lausekkeen $2x - \sqrt{1 - x^2}$ suurin ja pienin arvo. (Ylioppilaskoe, k. 1992)

488. Todista, että yhtälöllä $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri, ja määritä juuren arvo kolmen desimaalin tarkkuudella.
(Ylioppilaskoe, k. 1983)

489. Millä vakion p arvoilla polynomi $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ on koko $\mathbb{R}$:ssä aidosti kasvava? (Ylioppilaskoe, s. 1993)

490. Kahden metrin korkeudelta heitetty pallo osuu viiden metrin päässä olevan puun runkoon viiden metrin korkeudella. Pallon lentoratana on paraabeli, jonka huippu on heittäjän ja puun välissä kahden metrin etäisyydellä puusta. Laske heittokulma. (Ylioppilaskoe, k. 1991)

491. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ derivaatta kohdassa 3 erotusosamäärän raja-arvona.

492. Osoita, että yhtälöllä $(x + 1)^3 = x$ on täsmälleen yksi reaalijuuri. (Ylioppilaskoe, s. 1992)

493. Osoita, että jos $0 \leqslant a \leqslant 1$, niin kolmannen asteen yhtälöllä $x^3 - x^2 - x + a = 0$ on täsmälleen yksi juuri välillä $[0, 1]$.

494. Käyrän $y = \frac{1}{x^2}$ pisteeseen P piirretään käyrän tangentti. Kun tangentin ja koordinaattiakselien rajaama kolmio pyörähtää y-akselin ympäri, muodostuu kartio. Osoita, että kartion tilavuus ei riipu käyrän pisteestä P. Mikä kartion tilavuus on?

495. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -e^{-x} + x + 5$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion nollakohdan tarkka arvo ja arvon $f^{-1}(0)$ kaksidesimaalinen likiarvo. Jos piirretään samaan koordinaatistoon funktion f kuvaaja ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja muuttujana x, niin missä pisteissä kuvaajat leikkaavat toisensa?

496. Määritä funktion $f(x) = \sin x \cos^2 x$ suurin ja pienin arvo.

497. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ja paraabelin $y = x^2 + 1$ yhteiset tangentit.
(Ylioppilaskoe, s. 1984)

498. Olkoon $x > 0$. Ilmaise potenssi $x^{\frac{1}{x}}$ potenssina, jonka kantaluku on Neperin luku e, ja osoita, että $x^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{1-\frac{1}{x}}$. Millä x:n arvoilla pätee yhtäsuuruus?

499. Kolmannen asteen polynomifunktio P saa kohdassa -1 ääriarvon 5 ja funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Määritä funktio P.

500. Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ kuvaajalle piirretään normaali pisteeseen P, joka ei ole piste $(0, 1)$. Mitä pistettä normaalin ja y-akselin leikkauspiste lähenee, kun P lähenee pistettä $(0, 1)$?

501. Käyrälle $y = x^4$ pisteeseen (a, a^4), missä $a \neq 0$, piirretty tangentti ja normaali rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Kun tämä kolmio pyörähtää y-akselin ympäri, muodostuu kaksoiskartio. Määritä kaksoiskartion tilavuuden raja-arvo, kun a lähenee nollaa.

502. Osoita, että $(1+x)\ln x + 2(1-x) \leqslant 0$, kun $0 < x \leqslant 1$. (Ylioppilaskoe, s. 1993)

503. a) Osoita, että kaikilla $x > 0$ on

i) $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ ja

ii) $\ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

b) Funktion $\ln(1+x)$ arvoille välillä $0 < x < 0{,}01$ lasketaan likiarvoja sijoittamalla luvut polynomiin $x - \dfrac{x^2}{2}$. Tutki a-kohdan epäyhtälöiden avulla näin laskettujen likiarvojen tarkkuutta.

504. Todista: $e^x + e^{-x} - 2 - x^2 \geqslant 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Ylioppilaskoe, s. 1983)

Suurin ja pienin arvo – sovelluksia

Sovellustilanteessa, jossa on tutkittava derivaatan avulla jonkin suureen suurinta tai pienintä arvoa, on suureen arvot ilmaistava yhden muuttujan funktiona.

Muuttujan valinta

Joskus ongelmanasettelu tarjoaa suoraan muuttujan.

Joskus suure riippuu useammasta muuttujasta. Tällöin tehtävän tietojen perusteella päätellään, kuinka muuttujat riippuvat toisistaan, ja yksi niistä valitaan tutkittavan funktion muuttujaksi. Kannattaa pyrkiä valitsemaan muuttuja, joka johtaa yksinkertaisempaan funktioon.

On esimerkiksi määritettävä suoran ympyräkartion suurin mahdollinen tilavuus, kun kartion pohjan halkaisijan ja kartion korkeuden summa on 1. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, missä r on pohjaympyrän säde ja h on kartion korkeus. Koska pohjan halkaisijan ja kartion korkeuden summa on 1, niin $2r + h = 1$. Muuttajaksi valitaan r, koska tilavuuden lausekkeessa r korotetaan neliöön. Tällöin $h = 1 - 2r$ ja $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2(1 - 2r)$.

Muuttujan mahdolliset arvot

Kun muuttuja on valittu, selvitetään väli, jolla muuttujan arvot voivat sovellustilanteessa vaihdella.

Edellisessä tilanteessa muuttujan r arvot voivat vaihdella välillä $[0, \frac{1}{2}]$. Mukaan otettiin surkastuneet kartiot $r = 0$ ja $r = \frac{1}{2}$, koska silloin suurin arvo voidaan haluttaessa perustella suljetun välin menetelmällä.

Funktion yksinkertaistaminen

Joskus tutkittava funktio voidaan vaihtaa yksinkertaisempaan funktioon, joka saa suurimman (pienimmän) arvon samassa kohdassa.

Edellä ilmaistiin kartion tilavuus muuttujan r funktiona $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2(1 - 2r)$. Koska kerroin $\frac{1}{3}\pi$ on positiivinen, funktio $V(r)$ saa suurimman arvon samassa kohdassa kuin funktio $f(r) = r^2(1 - 2r)$. Voidaan siis siirtyä tutkimaan, missä kohdassa funktio f saa suurimman arvon.

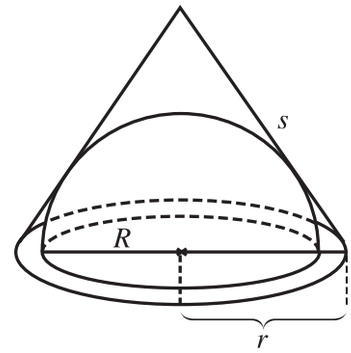
Muita tutkittavan funktion yksinkertaistamiskeinoja on seuraavassa esimerkissä.

ESIMERKKI 1

Puolipallon muotoisen ympyräpohjallaan makaavan säiliön säde on R. Säiliön suojaksi on rakennettava suoran ympyräkartion muotoinen teltta. Määritä telalle mitat niin, että teltan kattoon kuluu mahdollisimman vähän kangasta.

Ratkaisu

Voidaan olettaa, että puolipallon pinta sivuaa kartion vaippaa.



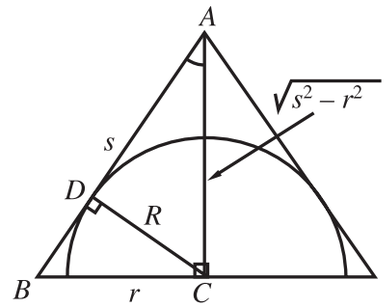
Merkitään ympyräkartion pohjan sädettä r ja sivujanaa s. Vaipan pinta-ala on $A = \pi rs$.

Kappaleet leikataan tasolla, joka sisältää kartion akselin.

Muodostuvan tasakylkisen kolmion korkeus h saadaan Pythagoraan lauseella.

$$r^2 + h^2 = s^2$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$



Kolmiot ABC ja ACD ovat yhdenmuotoiset (kk), joten

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{s^2 - r^2}}{s}$$

Molemmat puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa neliöön.

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{s^2 - r^2}{s^2}$$

Kerrotaan ristiin.

$$R^2 s^2 = r^2 s^2 - r^4$$

Yhtälöstä on helpompi ratkaista s kuin r. Valitaan muuttujaksi r ja ratkaistaan yhtälöstä s.

$$r^2 s^2 - R^2 s^2 = r^4$$

$$(r^2 - R^2)s^2 = r^4 \qquad \big| : (r^2 - R^2)$$

$$s^2 = \frac{r^4}{r^2 - R^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{r^4}{r^2 - R^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Pinta-ala muuttujan r funktiona on

$$A(r) = \pi rs = \pi r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \pi \frac{r^3}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Teltan pohjaympyrän säteen pituus voi olla mikä tahansa puoliympyrän sädettä R suurempi luku. Muuttujan r arvot ovat välillä $]R, \infty[$.

Koska $\pi > 0$, funktio $A(r)$ saa pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio $\frac{r^3}{\sqrt{r^2 - R^2}}$. Edelleen, koska $r > 0$, niin $r^3 = \sqrt{r^6}$ ja

$$\frac{r^3}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{r^6}}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \sqrt{\frac{r^6}{r^2 - R^2}}.$$

Koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, funktion $A(r)$ arvo on pienin, kun funktion $f(r) = \frac{r^6}{r^2 - R^2}$, missä $r > R$, arvo on pienin.

Derivoidaan funktio $f(r)$.

$$f'(r) = \frac{6r^5 \cdot (r^2 - R^2) - r^6 \cdot 2r}{(r^2 - R^2)^2} = \frac{4r^7 - 6R^2r^5}{(r^2 - R^2)^2}$$

$$= \frac{2r^5(2r^2 - 3R^2)}{(r^2 - R^2)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$2r^5(2r^2 - 3R^2) = 0$

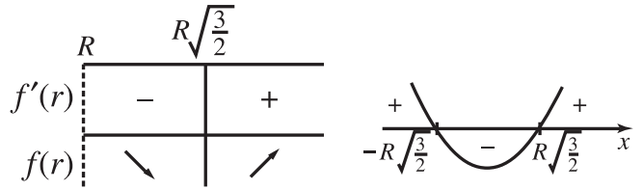
$r^5 = 0$ tai $2r^2 - 3R^2 = 0$

$r^5 = 0$ tai $r^2 = \frac{3}{2}R^2$

$r = 0$ tai $r = R\sqrt{\frac{3}{2}}$ tai $r = -R\sqrt{\frac{3}{2}}$

Välillä $]R, \infty[$ on derivaattafunktion nollakohta $R\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Laaditaan derivaattafunktion $f'(r) = \dfrac{2r^5(2r^2 - 3R^2)}{(r^2 - R^2)^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Koska lausekkeen nimittäjä on positiivinen ja $r > 0$, derivaatan merkin määrää lauseke $2r^2 - 3R^2$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Kulkukaavion mukaan funktio f saa pienimmän arvon kohdassa $r = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Kartion sivujana on tällöin

$$s = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\frac{3}{2}R^2}{\sqrt{\frac{3}{2}R^2 - R^2}} = \frac{\frac{3}{2}R^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}R} = \frac{3\sqrt{2}}{2}R$$

ja korkeus

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{\frac{9}{2}R^2 - \frac{3}{2}R^2} = R\sqrt{3}.$$

Vastaus pohjan säde $R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ja korkeus $R\sqrt{3}$

TEHTÄVIÄ

505. Suorakulmion yksi kärki on origossa, kärjen viereiset sivut positiivisilla koordinaattiakseleilla ja vastapäinen kärki käyrällä $y = e^{-x}$. Määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

506. Käytettävissä on 160 cm rautalankaa. Suunnittele mitat suoran ympyrälieriön muotoiselle lampunvarjostimelle, jonka pohjaympyrät ja neljä niitä yhdistävää pystytukea rakennetaan tästä rautalangasta ja jonka tilavuus on mahdollisimman suuri. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

507. Mikä on suurin arvo, jonka lauseke $y - 3x^2y$ saa origokeskisen yksikköympyrän kehällä?

508. Tasapaksusta peltilevystä on valmistettava litran vetoinen, suoran ympyrälieriön muotoinen, kanneton ja mahdollisimman kevyt muki. Mitkä ovat sen mitat? (Ylioppilaskoe, s. 1991)

509. Yritys haluaa ostaa kadun varrella olevan suorakaiteen muotoisen tontin rakennuttaakseen sille suorakaiteen muotoisen toimitalon, jonka pohja on 490 m^2. Rakennuksen on oltava kadun puolella vähintään 9 metriä ja muilla puolilla vähintään 5 metriä tontin rajasta, ja seinien on oltava tontin rajojen suuntaisia. Mikä on pienin tontti, joka sopii tarkoitukseen?
(Ylioppilaskoe, k. 1996)

510. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 10 ja korkeus 13. Määritä huipusta kannalle piirretyn korkeusjanan piste, jonka kolmion kärjistä mitattujen etäisyyksien summa on pienin.

511. Tilaa valaisee kaksi valonlähdettä, joista kirkkaamman antama valaistus on neljä kertaa niin suuri kuin himmeämmän. Valonlähteiden etäisyys toisistaan on 8,0 metriä. Määritä valonlähteiden väliseltä linjalta kohta, jossa valaistus on kaikkein heikoin. Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön.

512. Kolmion kaksi kärkeä on pisteissä (1, 3) ja (2, 5). Kolmas kärki on käyrällä $y = \ln(1 + x)$. Mitkä ovat kärjen koordinaatit, kun kolmion ala on mahdollisimman pieni? (Ylioppilaskoe, s. 1999)

513. Kaksi järveä on yhdistettävä mahdollisimman lyhyellä kanavalla. Määritä kanavan alku- ja loppupisteet koordinaatistossa, jossa järvien välisen kannaksen kapein kohta voidaan esittää muodossa $-(x + 1) \leqslant y \leqslant x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$.
(Ylioppilaskoe, s. 1994)

514. Mikä paraabelin $y = x^2$ piste on lähinnä pistettä (0, 3)?

515. Pallon sisään on mahdutettu tilavuudeltaan mahdollisimman suuri neliöpohjainen suorakulmainen särmiö. Pallon säde on 1. Mitkä särmiön mitat ovat?

516. Pallon sisään asetetaan mahdollisimman suuri neliöpohjainen suora pyramidi. Laske pyramidin ja pallon tilavuuksien suhde.
(Ylioppilaskoe, k. 1998)

517. Pallon säde on R. Määritä pohjan säde ja korkeus tilavuudeltaan pienimmälle suoralle ympyräkartiolle, jonka sisään pallo kokonaan mahtuu.

518. Määritä se pisteen $(2, 3)$ kautta kulkevista suorista, joka positiivisten koordinaattiakselien kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion. Mikä on tämän kolmion ala?
(Ylioppilaskoe, s. 1993)

519. Mihin käyrän $y = e^{-x}$ pisteeseen piirretty tangentti rajaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan suurimman kolmion?

520. Ympyrän muotoisen suon halkaisija AB on 1 km. Suunnistaja haluaa päästä mahdollisimman lyhyessä ajassa kohdasta A kohtaan B. Miten hänen on valittava reittinsä, jos hän juoksee kovalla maalla 10 km/h ja suolla 5 km/h?
(Ylioppilaskoe, s. 2000)

521. Ympyräsektori AOB, jonka säde on 1, taivutetaan ympyräkartion vaipaksi liittämällä yhteen säteet OA ja OB. Miten on valittava sektorin keskuskulma AOB, jotta saatu kartio olisi tilavuudeltaan mahdollisimman suuri? Ilmoita kulman tarkka arvo ja likiarvo asteen sadasosan tarkkuudella. (Ylioppilaskoe, k. 1985)

522. Suorakulmion $ABCD$ kärjen A kautta piirretty suora leikkaa sivun BC pisteessä E ja sivun DC jatkeen pisteessä F. Mikä on suhde $BE : BC$ silloin, kun kolmioiden ABE ja FCE pinta-alojen summa on mahdollisimman pieni?

523. Pitkin x-akselia kulkevalta tieltä on rakennettava mahdollisimman lyhyt pisteen $(5, 2)$ kautta kulkeva oikotie y-akselilla kulkevalle tielle. Määritä tien lähtöpaikka x-akselilla kolmen numeron tarkkuudella.

524. Valon kohdatessa tason pisteessä A valaistuksen voimakkuus on suoraan verrannollinen tason normaalin ja valon tulosuunnan välisen kulman kosiniin sekä kääntäen verrannollinen valolähteen ja pisteen A välisen etäisyyden neliöön. Kuinka korkealle pyöreän r-säteisen pöydän keskipisteen yläpuolelle on vietävä pistemäinen valolähde, jotta valaistuksen voimakkuus pöydän reunalla olisi mahdollisimman suuri? (Ylioppilaskoe, s. 1987)

525. Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on $6{,}6$ cm ja sivujana $11{,}0$ cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.
(Ylioppilaskoe, k. 2000)

526. Henkilön on päästävä suoran joen toisella puolella olevaan pisteeseen E, jonne on henkilöä lähinnä olevasta vastarannan kohdasta matkaa $5{,}2$ km myötävirtaan. Henkilön veneen nopeus veteen nähden on $3{,}2$ km/h, joen virtausnopeus $2{,}3$ km/h ja henkilön kävelynopeus $5{,}9$ km/h. Joen leveys on 600 m. Mikä on nopein reitti, kun joki ylitetään suoraviivaisesti, ja kuinka kauan matka pisteeseen E kestää?
(Ylioppilaskoe, s. 1997)

527. Jana, jonka pituus on 4, liikkuu niin, että janan toinen päätepiste on y-akselilla ja toinen suoralla $y = x$. Millä välillä janan keskipisteen y-koordinaatti vaihtelee?

Integraalilaskenta

Integraalifunktio

Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos ja vain jos jokaisessa funktion f määrittelyjoukon pisteessä x on

$F'(x) = f(x)$.

Esimerkiksi funktio $g(x) = -x\cos x + \sin x$ on funktion $f(x) = x\sin x$ integraalifunktio, sillä

$g'(x) = -1 \cdot \cos x + (-x)(-\sin x) + \cos x = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x.$

Jos funktio F on jokin funktion f integraalifunktio, niin jokainen funktio $F + C$, missä C on vakio, on funktion f integraalifunktio. Jos funktion f määrittelyjoukko on väli, näin saadaan kaikki funktion f integraalifunktiot:

> Jos funktion f määrittelyjoukko on väli ja F on funktion f jokin integraalifunktio, niin funktio G on funktion f integraalifunktio, jos ja vain jos $G = F + C$, missä C on vakio.

Esimerkiksi funktion $x\sin x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, joten funktion kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $-x\cos x + \sin x + C$, missä C on vakio.

Jos funktion f määrittelyjoukko on väli, niin funktion f integraalifunktio määräytyy yksikäsitteisesti, jos tunnetaan yksi integraalifunktion arvo.

Jos esimerkiksi halutaan löytää funktion $x\sin x$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(\frac{\pi}{2}, 4)$ kautta, niin vakiolle C saadaan ehto

$-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 4$. Koska $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ja $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, tulee olla $1 + C = 4$ eli $C = 3$. Etsitty integraalifunktio on $-x\cos x + \sin x + 3$.

Integroiminen

Integraalifunktioiden määrittämistä kutsutaan *integroimiseksi*.
Funktion $f(x)$ integroiminen merkitään

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integroimisen tulos annetaan muodossa, joka sisältää kaikki integraalifunktiot:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

missä F on funktion f jokin integraalifunktio ja C on vakio.

Tavallisten funktioiden integroiminen perustuu derivointikaavoihin.

Integroimisen voi aina tarkistaa derivoimalla.

Seuraavat tavallisten funktioiden integroimiskaavat ovat taulukkokirjassa.*

$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	potenssifunktio x^r, missä $r \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	potenssifunktio x^{-1}
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$	
$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	

---

* Funktion $\frac{1}{x}$ integroimiskaava on tiivistetty kahdesta eri kaavasta:

Kun $x > 0$, niin $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C_1$, sillä $\mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x}$.

Kun $x < 0$, niin $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C_2$, sillä $\mathrm{D}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Vakioilla C_1 ja C_2 voi olla eri arvot, sillä funktion $\frac{1}{x}$ määrittelyjoukko $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ muodostuu kahdesta erillisestä välistä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$.

Esimerkiksi $\int \left(\frac{2}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{5x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$= \int \left(\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}\ln|x| + C$

$= \frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5}\ln|x| + C = -\frac{4}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{5}\ln x + C.$

Koska integroitavan funktion määrittelyjoukko on $]0, \infty[$, logaritmifunktiosta voidaan jättää itseisarvomerkit pois.

Harjoituksia

528. Onko funktio $f : f(x) = e^x \sin x$ funktion $g : g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ integraalifunktio? (Ylioppilaskoe, s. 1991)

529. Määritä vakiot A ja B niin, että funktio $g(x) = Ax^2 \ln x + Bx^2$ on funktion $f(x) = x \ln x$ integraalifunktio.

530. Määritä $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

531. Määritä funktion $f(x) = -2x + 6$ integraalifunktio, jonka
a) kuvaaja kulkee pisteen $(1, -4)$ kautta b) suurin arvo on 5.

532. Funktio F on määritelty arvoilla $x < 0$ ja toteuttaa ehdot $F'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ja $F(-1) = 1$. Määritä F. (Ylioppilaskoe, s. 1986)

Yhdistetyn funktion integroiminen

Yhdistettyjen funktioiden integroiminen perustuu yhdistettyjen funktioiden derivoimissääntöön.

$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$

Ulkofunktion g derivaatta g' kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

Säännön perusteella:

$\mathrm{D}\, e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x) = f'(x)e^{f(x)}$

$\mathrm{D}\sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x) = f'(x)\cos f(x)$

$\mathrm{D}\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x) = -f'(x)\sin f(x)$

$\mathrm{D}\, f(x)^{r+1} = (r+1)f(x)^r \cdot f'(x) = (r+1)f'(x)f(x)^r$

$\mathrm{D}\ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.$

Derivointikaavoista saadaan integroimiskaavat.

$$\int f'(x)g(f(x))\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + C$$

Jos integroitava funktio on yhdistetty funktio $g(f(x))$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$, niin eräs integraalifunktio on $G(f(x))$, missä G on g:n integraalifunktio.

Siis erityisesti:

$\int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$

Integroitava funktio on yhdistetty funktio $e^{f(x)}$ kerrottuna sisäfunktion $f(x)$ derivaattafunktiolla $f'(x)$.

$\int f'(x)\sin f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos f(x) + C$

Integroitava funktio on yhdistetty funktio $\sin f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f(x)$ derivaattafunktiolla $f'(x)$.

$\int f'(x)\cos f(x)\,\mathrm{d}x = \sin f(x) + C$

Integroitava funktio on yhdistetty funktio $\cos f(x)$ kerrottuna sisäfunktion $f(x)$ derivaattafunktiolla $f'(x)$.

$\int f'(x)f(x)^r\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$

Integroitava funktio on yhdistetty funktio $f(x)^r$ kerrottuna sisäfunktion $f(x)$ derivaattafunktiolla $f'(x)$.

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$

Integroitava funktio on yhdistetty funktio $\dfrac{1}{f(x)}$ kerrottuna sisäfunktion $f(x)$ derivaattafunktiolla $f'(x)$.

ESIMERKKI 1

Määritä.

a) $\int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^3}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{3x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Ratkaisu

a) $\int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^3}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x^3}\right)\mathrm{d}x$

Järjestetään integroitavaan funktioon tekijäksi sisäfunktion $-\frac{1}{2}x^3$ derivaatta $-\frac{3}{2}x^2$.

$= -\frac{2}{3}\int \left(-\frac{3}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x^3}\right)\mathrm{d}x$ $\int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$

$= -\frac{2}{3}\,e^{-\frac{1}{2}x^3} + C$

b) $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cdot 3\sin 3x\,\mathrm{d}x$

Järjestetään integroitavaan funktioon tekijäksi sisäfunktion $3x$ derivaatta 3.

$= \frac{1}{3}\int 3\sin 3x\,\mathrm{d}x$ $\int f'(x)\sin f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos f(x) + C$

$= \frac{1}{3}(-\cos 3x) + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

c) $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int x(x^2-1)^{-2}\,\mathrm{d}x$

Järjestetään integroitavaan funktioon tekijäksi sisäfunktion x^2-1 derivaatta $2x$.

$= \int \frac{1}{2}\cdot 2x(x^2-1)^{-2}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{-2}\,\mathrm{d}x$ $\int f'(x)f(x)^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$

$= \frac{1}{2}\cdot(-1)(x^2-1)^{-1} + C$

$= \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2-1} + C$

$= -\frac{1}{2(x^2-1)} + C$

d) $\int \frac{3x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Järjestetään integroitavan funktion osoittajaksi nimittäjän x^2-1 derivaatta $2x$.

$= 3\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

$= \frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C$

Vastaus

a) $-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x^3} + C$ b) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

c) $-\frac{1}{2(x^2-1)} + C$ d) $\frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C$

Integraalifunktion (mahdollista vakiokerrointa lukuun ottamatta) voi usein havaita myös suoraan. Ehdokas derivoidaan ja sen jälkeen tarvittaessa korjataan vakiokerroin.

On esimerkiksi integroitava funktio $(2x+1)^4$. Kokeillaan funktiota $(2x+1)^5$. Derivoidaan: $\mathrm{D}(2x+1)^5 = 5\cdot(2x+1)^4\cdot 2 = 10(2x+1)^4$.

Korjataan arvaus kertomalla luvulla $\frac{1}{10}$, jolloin saadaan

$\int (2x+1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C.$

Tuloksen voi kirjata ilman välivaiheita tai perusteluja.

Harjoituksia

533. Määritä $\int (2\sin x + \cos 3x - 2\sin 6x)\mathrm{d}x$.

534. Integroi funktio $\frac{3+e^{3x}}{e^x}$.

535. Määritä. a) $\int (x+1)^5\,\mathrm{d}x$ b) $\int (3x+1)^5\,\mathrm{d}x$

536. Määritä. a) $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(3x+1)^5}\,\mathrm{d}x$

Määrätty integraali

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä, joka sisältää luvut a ja b. Olkoon F funktion f jokin integraalifunktio.

Funktion f *määrätty integraali* a:sta b:hen on integraalifunktion F arvojen $F(b)$ ja $F(a)$ erotus.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

Luku a on määrätyn integraalin *alaraja* ja luku b määrätyn integraalin *yläraja*.

Esimerkiksi $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - x^{-2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \Big/_1^3 \left(\ln|x| - (-1)x^{-1}\right) = \Big/_1^3 \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\ln 3 + \frac{1}{3}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1}\right) = \left(\ln 3 + \frac{1}{3}\right) - (0 - 1) = \ln 3 + \frac{4}{3}.$$

Seuraavat määrätyn integraalin ominaisuudet seuraavat suoraan määritelmästä.

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Summan integraali on integraalien summa.

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funktion vakiokerroin voidaan siirtää integraalin kertoimeksi.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Jos yläraja ja alaraja vaihdetaan keskenään, integraali muuttuu vastaluvuksi.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Jos rajat ovat yhtä suuret, integraalin arvo on 0.

Esimerkiksi $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}t$

$= \Big/_0^{\pi} t = \pi - 0 = \pi.$

Integroiminen paloittain

Kaavan

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

mukaan integraali a:sta b:hen voidaan laskea paloina niin, että ensin integroidaan a:sta c:hen ja sitten c:stä b:hen.

ESIMERKKI 2

Laske $\int_0^3 (2x^2 + |x^2 - x|)\mathrm{d}x.$

Ratkaisu Ilmaistaan integroitava funktio ilman itseisarvomerkkejä.

Määritetään funktion $x^2 - x$ merkit.

Ratkaistaan nollakohdat:

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$.

Funktion $x^2 - x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Siis

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, \text{ kun } x < 0 \\ -x^2 + x, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - x, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$$

joten

$$2x^2 + |x^2 - x| = \begin{cases} 2x^2 + x^2 - x = 3x^2 - x & , \text{kun } x < 0 \\ 2x^2 + (-x^2 + x) = x^2 + x, & \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x^2 + x^2 - x = 3x^2 - x & , \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Integroidaan kohdan 1 kautta.

$$\int_0^3 (2x^2 + |x^2 - x|)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + x)\mathrm{d}x + \int_1^3 (3x^2 - x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) + \Big/_1^3 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(27 - \frac{1}{2} \cdot 9\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 27 - \frac{9}{2} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{137}{6}$$

Vastaus $\frac{137}{6}$

Harjoituksia

537. Laske $\int_0^1 x(\sqrt{x} + 1)\mathrm{d}x$. (Ylioppilaskoe, k. 1988)

538. Laske $\int_1^e \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x$. (Ylioppilaskoe, k. 1990)

539. Laske $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^{-1})^2\,\mathrm{d}x$. (Ylioppilaskoe, s. 1983)

540. Laske $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2\,\mathrm{d}x$. (Ylioppilaskoe, s. 1982)

541. Laske $\int_0^3 |x - 2|\mathrm{d}x$.

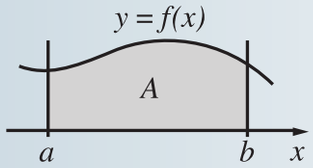
Pinta-alan laskeminen

Kuvaajan ja *x*-akselin rajaaman alueen pinta-ala

Jatkuvan funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala voidaan laskea määrätyn integraalin avulla.

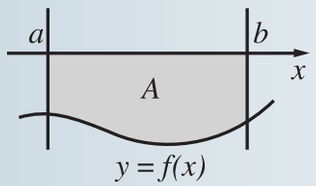
Jos $f(x) \geqslant 0$, niin pinta-ala on funktion f määrätty integraali a:sta b:hen.

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Jos $f(x) \leqslant 0$, niin pinta-ala on määrätyn integraalin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vastaluku.

$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

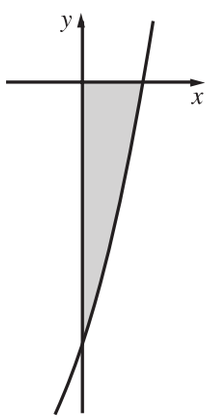


ESIMERKKI 3

Laske käyrän $y = e^{3x} - 2$ ja koordinaattiakselien rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu

Alue on x-akselin alapuolella. Ratkaistaan käyrän ja x-akselin leikkauspiste.



$$e^{3x} - 2 = 0$$

$$e^{3x} = 2$$

$$3x = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{3}$$

Pinta-ala on määrätyn integraalin $\int_0^{\frac{\ln 2}{3}} (e^{3x} - 2)\mathrm{d}x$ vastaluku.

Lasketaan ensin määrätyn integraalin arvo.

$$\int_0^{\frac{\ln 2}{3}} (e^{3x} - 2)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\ln 2}{3}} (\tfrac{1}{3} \cdot 3e^{3x} - 2)\mathrm{d}x = \Big/_0^{\frac{\ln 2}{3}} (\tfrac{1}{3} e^{3x} - 2x)$$

$$= (\tfrac{1}{3} e^{3 \cdot \frac{\ln 2}{3}} - 2 \cdot \tfrac{\ln 2}{3}) - (\tfrac{1}{3} e^{3 \cdot 0} - 2 \cdot 0)$$

$$= (\tfrac{1}{3} e^{\ln 2} - \tfrac{2}{3} \ln 2) - (\tfrac{1}{3} e^{0} - 0)$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 2 - \tfrac{2}{3} \ln 2 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} \ln 2$$

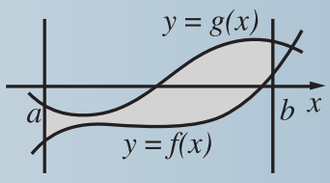
Pinta-ala on $A = -(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} \ln 2) = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \ln 2$.

Vastaus $-\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \ln 2 \approx 0{,}13$

Kahden käyrän rajaaman alueen pinta-ala

Jos aluetta rajaa välillä $[a, b]$ yläpuolelta jatkuvan funktion g kuvaaja ja alapuolelta jatkuvan funktion f kuvaaja, alueen pinta-ala on erotusfunktion $g - f$ määrätty integraali a:sta b:hen.

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$



Pinta-aloja laskettaessa on aina perusteltava kuvion avulla, kumman funktion kuvaaja rajaa aluetta yläpuolelta ja kumman alapuolelta. Jos tilanne ei kuvion perusteella ole ilmeinen, lisäperusteluksi on laskettava funktioiden arvoja.

ESIMERKKI 4

Laske käyrien $xy = 6$ ja $2x + y - 8 = 0$ rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} xy = 6 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

Sijoitetaan y:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

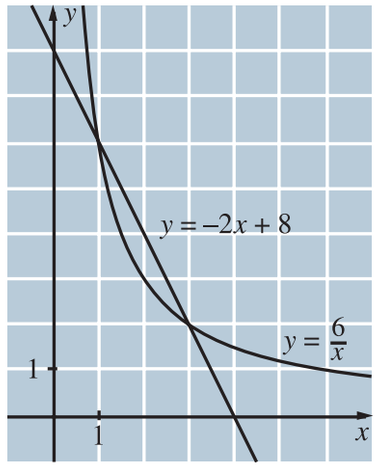
$$x(-2x + 8) = 6$$

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0$$

Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = 1 \text{ tai } x = 3$$

Alue muodostuu välille $[1, 3]$, ja sitä rajaa yläpuolelta suora $y = -2x + 8$ ja alapuolelta käyrän $y = \frac{6}{x}$ koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä oleva haara.



Alueen pinta-ala on

$$A = \int_1^3 (-2x + 8 - \frac{6}{x})dx = \Big/_1^3 (-x^2 + 8x - 6 \ln |x|)$$

$$= (-9 + 24 - 6 \ln 3) - (-1 + 8 - 6 \ln 1) = 15 - 6 \ln 3 - 7 = 8 - 6 \ln 3.$$

Vastaus

$8 - 6 \ln 3 \approx 1{,}4$

Harjoituksia

542. Laske käyrän $y = \frac{4}{x}$, x-akselin ja suorien $x = -6$ ja $x = -3$ rajaaman alueen pinta-ala.

543. Laske käyrän $x = y^2 + y$ ja y-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

544. Laske funktion $f(x) = e^x - \frac{1}{2}$ kuvaajan ja koordinaattiakselien rajaaman alueen pinta-ala.

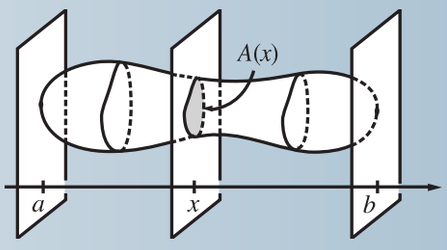
545. Aluetta rajaavat käyrät $y = x^3 + 1$, $y = x^3 - 2$ ja suorat $x = 1$ ja $x = 5$. Laske alueen pinta-ala.

546. Laske sen äärellisen kuvion pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = x^2$ ja $y = x^3$. (Ylioppilaskoe, s. 1981)

Tilavuuden laskeminen

Jos avaruuden kappaletta rajoittava pinta on riittävän säännöllinen, kappaleen tilavuus saadaan integroimalla kappaleen koordinaattiakselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-alaa.

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

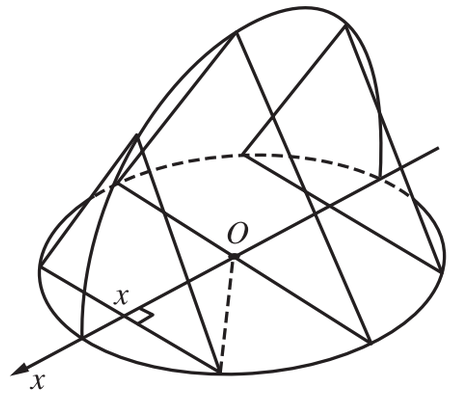


ESIMERKKI 5

Kappaleen pohja on ympyrä, jonka säde on 4. Yhtä ympyrän halkaisijaa vastaan kohtisuorat kappaleen poikkileikkaukset ovat tasasivuisia kolmioita. Laske kappaleen tilavuus.

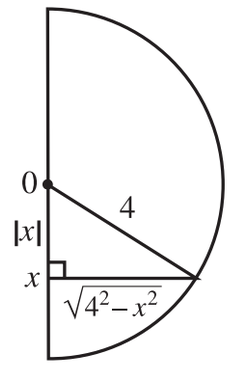
Ratkaisu

Sijoitetaan x-akseli kulkemaan pitkin halkaisijaa niin, että origo on keskipisteessä.



Poikkileikkauskolmion sivun puolikkaan pituus muuttujan arvon x kohdalla on

$$\sqrt{4^2 - x^2} = \sqrt{16 - x^2}\,.$$



Poikkileikkauskolmion sivun pituus muuttujan arvon x kohdalla on $2\sqrt{16 - x^2}$ ja kolmion pinta-ala

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(2\sqrt{16 - x^2}\,)^2$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.*

$$= \sqrt{3}\,(16 - x^2).$$

---

* Kaava on taulukkokirjassa.

Kappaleen tilavuus on

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{4} A(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{Kappale on symmetrinen.}$$

$$= 2\int_{0}^{4} \sqrt{3}\,(16 - x^2)\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}\int_{0}^{4} (16 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{3}\,\Big/_{0}^{4}\,(16x - \frac{1}{3}x^3) = 2\sqrt{3}\,((16 \cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 4^3) - 0)$$

$$= 2\sqrt{3}\,(64 - \frac{64}{3}) = 2\sqrt{3}\,\cdot\frac{128}{3} = \frac{256\sqrt{3}}{3}.$$

Vastaus $\dfrac{256\sqrt{3}}{3} \approx 148$

Pyörähdys-kappale

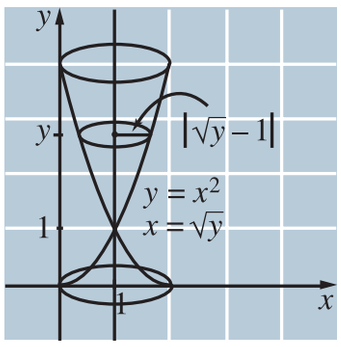
Kun käyrä pyörähtää suoran ympäri, pyörähdyskappaleen suoraa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat ympyröitä.

ESIMERKKI 6

Käyrän $y = x^2$ välillä $[0, 2]$ oleva osa pyörähtää suoran $x = 1$ ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu

Kappaleen suoraa $x = 1$ vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat ympyröitä.



Koska $x^2 = y$ ja $x \geqslant 0$, niin $x = \sqrt{y}$. Poikkileikkausympyrän säde muuttujan arvon y kohdalla on $|\sqrt{y} - 1|$.

Tilavuus lasketaan integroimalla poikkileikkauksen pinta-alaa y:n suhteen alarajasta $y = 0^2 = 0$ ylärajaan $y = 2^2 = 4$.

$$V = \int_0^4 \pi|\sqrt{y} - 1|^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^4 (\sqrt{y} - 1)^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^4 (y - 2\sqrt{y} + 1)\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_0^4 (y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1)\mathrm{d}y = \pi \Big/_0^4 (\frac{1}{2}y^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + y)$$

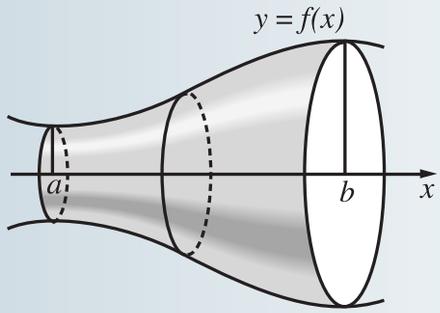
$$= \pi \Big/_0^4 (\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}y\sqrt{y} + y) = \pi(\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{4}{3} \cdot 4\sqrt{4} + 4)$$

$$= \pi(8 - \frac{32}{3} + 4) = \frac{4\pi}{3}$$

Vastaus $\frac{4\pi}{3} \approx 4{,}2$

Kun funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, b]$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri, muodostuvan kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$



ESIMERKKI 7

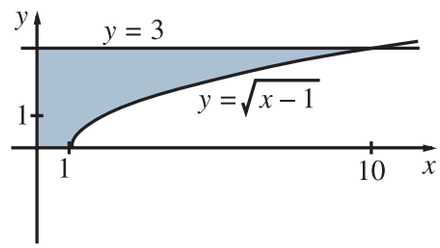
Käyrän $y = \sqrt{x-1}$, koordinaattiakselien ja suoran $y = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu

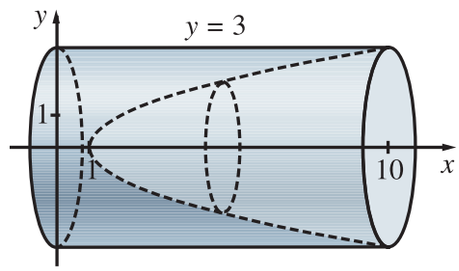
Funktio $\sqrt{x-1}$ on määritelty, kun $x - 1 \geqslant 0$ eli kun $x \geqslant 1$.

Käyrä $y = \sqrt{x-1}$ ja suora $y = 3$ leikkaavat, kun

$$\sqrt{x-1} = 3$$
$$x - 1 = 9$$
$$x = 10.$$



Muodostuvan kappaleen tilavuus saadaan, kun suoran $y = 3$ pyörähtäessä muodostuvan kappaleen tilavuudesta vähennetään käyrän $y = \sqrt{x-1}$ pyörähtäessä muodostuvan kappaleen tilavuus.



Kun suoran $y = 3$ välillä $[0, 10]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri, muodostuu suora ympyrälieriö, jonka pohjan säde on 3 ja korkeus 10. Kappaleen tilavuus on*

$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi.$$

---

* Voidaan myös laskea $V_1 = \pi \int_0^{10} 3^2 \, dx = \pi \int_0^{10} 9 \, dx$.

Kun käyrän $y = \sqrt{x-1}$ välillä $[1, 10]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri, pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V_2 = \pi \int_1^{10} (\sqrt{x-1})^2 \, dx = \pi \int_1^{10} (x-1) dx = \pi \Big/_1^{10} (\frac{1}{2}x^2 - x)$$

$$= \pi((\frac{1}{2} \cdot 100 - 10) - (\frac{1}{2} - 1)) = \pi(40 + \frac{1}{2}) = \frac{81\pi}{2}.$$

Kysytty tilavuus on $V = V_1 - V_2 = 90\pi - \frac{81\pi}{2} = \frac{99\pi}{2}$.

Vastaus $\frac{99\pi}{2} \approx 156$

Harjoituksia

547. Funktion $f(x) = -e^x$ kuvaajan, x-akselin ja suorien $x = 1$ ja $x = 2$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

548. Funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan välillä $[0, 3]$ oleva osa pyörähtää
a) x-akselin b) y-akselin ympäri.
Kuinka suuri rajautuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on?

TEHTÄVIÄ

549. Laske $\int_1^4 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

550. Laske $\int_0^{\ln 2} (e^{3x} + 2e^{-x})\mathrm{d}x$.

(Ylioppilaskoe, s. 1996)

551. Laske $\int_0^1 (1-x^2)^r x \,\mathrm{d}x$, kun r on positiivinen vakio. (Ylioppilaskoe, s. 1993)

552. Laske $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 \,\mathrm{d}x$.

(Ylioppilaskoe, k. 1984)

553. Laske $\int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x}}$.

(Ylioppilaskoe, k. 1989)

554. Määritä se funktion $f : f(x) = \sin 2x + 1$ integraalifunktio, jolla on nollakohta $\frac{\pi}{3}$.

555. Funktiolla $f(x) = x^2 - 2x + a$ on integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteiden $(-1, 0)$ ja $(1, 2)$ kautta. Määritä vakio a.

556. Määritä vakiot A ja B siten, että funktio $F : F(x) = A \ln(1-x) + B \ln(x+2)$ on funktion $f : f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x-2}$ integraalifunktio välillä $]-2, 1[$. (Ylioppilaskoe, s. 1988)

557. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä $y = \frac{1+x}{x^3}$, x-akseli sekä suorat $x = \frac{1}{3}$ ja $x = \frac{1}{2}$.

(Ylioppilaskoe, s. 1988)

558. Suoran tien viereen rakennetaan täyttömaasta meluvalli, jonka poikkileikkaus on pystyssä olevan paraabelin muotoinen. Vallin korkeus on 3 m, leveys maanpinnan tasolla 6 m ja pituus 55 m. Kuinka monta kuutiometriä täyttömaata valliin tarvitaan? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

559. Reaalilukujen joukossa määritellyn funktion f kuvaajan mielivaltaiseen pisteeseen (x, y) piirretyn tangentin kulmakerroin on $k(x) = 1 - e^{-2x}$. Funktion f pienin arvo on 2. Määritä f. (Ylioppilaskoe, k. 2000)

560. Suora $y = \frac{1}{2}x$ ja paraabeli $y = kx^2$ $(k > 0)$ rajoittavat äärellisen alueen A. Määritä vakio k siten, että A:n ala on 3. (Ylioppilaskoe, s. 1980)

561. Laske käyrien $y = x|x| + 3$ ja $y = x^2 + x$ rajaaman alueen pinta-ala.

562. Piirrä epäyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^2 + y \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

määräämä alue ja laske sen pinta-ala.

563. Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien $y = 4$ ja $y = -4$, paraabelin $x = 1 + y^2$ sekä y-akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on 3 600 kg/m^3?
(Ylioppilaskoe, k. 1994)

564. Kappeli on sivukuvassa käyrän $y = \frac{6}{x}$ välillä $[1, 6]$ olevan osan muotoinen, ja kappelin pituussuuntaa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat tasasivuisia kolmioita. Yksikkönä on metri. Laske kappelin tilavuus kolmen numeron tarkkuudella.

565. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x-akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

566. Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta? (Ylioppilaskoe, k. 1998)

567. Käyrän $y = (x - 3)^2$ ja koordinaattiakseleiden rajaama alue pyörähtää a) x-akselin b) y-akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

568. Käyrän $y^2 = (2 + x)(2 - x)(1 - x)$ muodostama umpinainen silmukka pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus. (Ylioppilaskoe, s. 1991)

569. Paraabeli $y = ax - x^2$ $(a > 0)$ leikkaa x-akselin origossa O ja toisessa pisteessä A. Paraabelille pisteeseen A piirretty tangentti leikkaa y-akselin pisteessä B. Osoita, että paraabelin kaari jakaa kolmion OBA kahteen osaan, joiden pinta-alojen suhde on a:sta riippumaton.

570. Käyrän $y = \sin x$ piste (x, y), $0 < x < \pi$, yhdistetään x-akseliin suoran $y = -\frac{1}{2}x$ suuntaisella janalla J. Määritä käyrän välillä $[0, x]$ olevan osan, janan J ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala A x:n funktiona. Millä x:n arvolla A saavuttaa suurimman arvonsa?
(Ylioppilaskoe, k. 1999)

571. Aluetta rajaa käyrä $y = e^x$, suora $y = x$ ja kaksi y-akselin suuntaista suoraa, joiden etäisyys on 1. Määritä nämä suorat niin, että alueen pinta-ala on mahdollisimman pieni.

572. Minkä käyrän muodostavat puoliympyrässä $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$, olevat pisteet, jotka ovat yhtä etäällä puoliympyrän halkaisijasta ja puoliympyrän kehästä? Laske käyrän ja halkaisijan väliin jäävän alueen pinta-alan suhde koko puoliympyrän pinta-alaan.

573. Funktio f määritellään koko $\mathbb{R}$:ssä kaavalla $f(x) = \int_{-1}^{1} |x - t| \mathrm{d}t$. Määritä tämän funktion esitys integroidussa muodossa ja piirrä funktion kuvaaja. (Ylioppilaskoe, k. 1980)

574. Esitä funktio $f : f(x) = \int_{0}^{2x} (t + |t - x|) \mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, integroidussa muodossa sekä piirrä funktion kuvaaja. (Ylioppilaskoe, s. 1992)

575. Suorasta ympyrälieriöstä leikataan kiila tasolla, joka sivuaa toista pohjaympyrää ja kulkee toisen pohjaympyrän keskipisteen kautta. Laske kiilan tilavuuden suhde lieriön tilavuuteen.

Lukujonot ja summat

Lukujono

Lukujono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ kuvaillaan usein lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$. Tällöin on $a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ a_3 = f(3)$ jne.

Esimerkiksi parittomien positiivisten kokonaislukujen jonolla $1, 3, 5, \ldots$ on lauseke $a_n = 2n - 1$. Jonon 317. jäsen on $a_{317} = 2 \cdot 317 - 1 = 633$.

Jonoa $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ voidaan merkitä (a_n). Lukuja $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ kutsutaan jonon (a_n) *jäseniksi* tai *termeiksi.*

ESIMERKKI 1

Lukujonossa (a_n) on $a_n = \dfrac{6n+5}{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osoita, että jonon kaikki jäsenet ovat suurempia kuin 3.

Ratkaisu

Tapa 1. Tutkitaan erotusta $a_n - 3$.

$$a_n - 3 = \frac{6n+5}{2n+1} - 3 = \frac{6n+5}{2n+1} - \frac{3(2n+1)}{2n+1} = \frac{6n+5-3(2n+1)}{2n+1}$$

$$= \frac{6n+5-6n-3}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin $2n+1 > 0$ ja siis $\dfrac{2}{2n+1} > 0$.

Koska $a_n - 3 > 0$, niin $a_n > 3$ kaikilla n.

Tapa 2. Arvioidaan.

Koska $6n + 5 > 6n + 3$ ja $2n + 1 > 0$, niin

$$\frac{6n+5}{2n+1} > \frac{6n+3}{2n+1} = \frac{3(2n+1)}{2n+1} = 3.$$

Siis $a_n > 3$ kaikilla n.

Kasvava ja vähenevä jono

Lukujono (a_n) on *aidosti kasvava*, jos jonon jäsenet suurenevat koko ajan:

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$.

Aidosti kasvavassa lukujonossa seuraava jäsen on aina edeltävää jäsentä suurempi eli

$a_n < a_{n+1}$ kaikilla n.

Lukujono (a_n) on *aidosti vähenevä*, jos

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$.

Aidosti vähenevässä lukujonossa seuraava jäsen on aina edeltävää jäsentä pienempi eli

$a_n > a_{n+1}$ kaikilla n.

Lukujono (a_n) on *kasvava*, jos $a_n \leqslant a_{n+1}$ kaikilla n, ja
vähenevä, jos $a_n \geqslant a_{n+1}$ kaikilla n.

ESIMERKKI 2

Lukujonossa (a_n) on $a_n = \dfrac{6n+5}{2n+1}$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osoita, että jono (a_n) on aidosti vähenevä.

Ratkaisu

Tapa 1. Lukujonon jäsenet ovat välillä $]-\frac{1}{2}, \infty[$ määritellyn funktion $f(x) = \dfrac{6x+5}{2x+1}$ arvoja kokonaislukupisteissä $1, 2, 3, \ldots$.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (2x+1) - (6x+5) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{12x + 6 - 12x - 10}{(2x+1)^2} = -\frac{4}{(2x+1)^2}$$

Koska $(2x+1)^2 > 0$, niin $f'(x) = -\dfrac{4}{(2x+1)^2} < 0$ kaikilla $x > -\frac{1}{2}$.

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\frac{1}{2}, \infty[$, joten $f(1) > f(2) > f(3) > \ldots$ eli $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$. Jono (a_n) on aidosti vähenevä.

Tapa 2. Tutkitaan jonon peräkkäisten jäsenten erotusta $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{6n+5}{2n+1} = \frac{6n+11}{2n+3} - \frac{6n+5}{2n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(6n+11) - (2n+3)(6n+5)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{12n^2 + 28n + 11 - (12n^2 + 28n + 15)}{(2n+3)(2n+1)} = -\frac{4}{(2n+3)(2n+1)}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin $2n+3 > 0$ ja $2n+1 > 0$ kaikilla n, joten

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{4}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \text{ kaikilla } n.$$

Koska $a_{n+1} - a_n < 0$, niin $a_n > a_{n+1}$ kaikilla n. Jono (a_n) on aidosti vähenevä.

Harjoituksia

576. Ilmaise lausekkeen avulla muodossa $a_n = f(n)$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$,

a) lukujono $\frac{2}{11}, \frac{4}{21}, \frac{6}{31}, \ldots$, jonka jäsenten osoittajat suurenevat aina kahdella ja nimittäjä kymmenellä

b) lukujono $1, -2, 3, -4, \ldots$, jonka jäsenten merkit vuorottelevat ja itseisarvot muodostavat positiivisten kokonaislukujen jonon.

577. Lukujonossa (a_n) on $a_n = \frac{3n+2}{n+8}$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tutki, ovatko luvut $\frac{3}{2}$ ja 2 jonon jäseniä. Jos ovat, niin kuinka monensia jäseniä?

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono, jonka peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on aina yhtä suuri, on *aritmeettinen jono*.

Siis jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on aritmeettinen, jos ja vain jos on olemassa luku d niin, että

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla n.

Esimerkiksi jono $a_n = 12 - 7n$, joka alkaa $12, 5, -2, \ldots$, on aritmeettinen, sillä $a_{n+1} - a_n = 12 - 7(n+1) - (12 - 7n) = 12 - 7n - 7 - 12 + 7n = -7$ kaikilla n.

Jos aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on d, niin jonon n. jäsen a_n saadaan ensimmäisestä jäsenestä a_1 lisäämällä siihen $n - 1$ kappaletta lukuja d eli

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Jos ensimmäinen luku $a_1 = -7$ ja lisäys $d = 4$, saadaan aritmeettinen jono $-7, -3, 1, \ldots$. Jonon 25. jäsen on $a_{25} = -7 + 24 \cdot 4 = 89$. Yleisesti $a_n = -7 + (n-1) \cdot 4 = -11 + 4n$.

Aritmeettinen summa

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *aritmeettiseksi summaksi*.

Aritmeettisen summan $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ arvo voidaan laskea kaavalla

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Lasketaan esimerkiksi aritmeettisen jonon $-7,\ -3,\ 1, ...$ viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa. Jonon 50. jäsen on $-7 + 49 \cdot 4 = 189$.

Jonon 50 ensimmäisen jäsenen summa on $50 \cdot \frac{-7 + 189}{2} = 4\,550$.

ESIMERKKI 3

Laske $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$.

Ratkaisu

Merkintä $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ tarkoittaa summaa

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \ldots + (2n - 1)$$
$$= 1 + 3 + \ldots + 2n - 1.$$

Kyseessä on n:n ensimmäisen parittoman positiivisen kokonaisluvun summa. Summa on aritmeettinen, joten

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n \cdot \frac{1 + (2n - 1)}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n^2.$$

Vastaus n^2

Harjoituksia

578. Aritmeettinen jono alkaa $3,\ 10, \ldots$. Määritä jonon 34. jäsen. Muodosta jonon n. jäsenen lauseke ja selvitä, kuinka mones jonon jäsen luku 689 on.

579. Aritmeettisessa jonossa (a_n) on $a_1 = 3$ ja $a_8 = 115$. Määritä jonon peräkkäisten jäsenten erotus d ja jonon 20. jäsen a_{20}.

580. Aritmeettinen jono alkaa $7,\ 12, \ldots$. Laske jonon 40 ensimmäisen jäsenen summa.

581. Laske lukua 100 pienempien 3:lla jaollisten positiivisten kokonaislukujen summa.

582. Laske. a) $\sum_{k=1}^{190} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{n} 2k$

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono, jonka peräkkäisten jäsenten suhde on aina yhtä suuri, on *geometrinen jono*.

Siis jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ on geometrinen, jos ja vain jos on olemassa luku q niin, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla n.

Esimerkiksi jono $a_n = 4 \cdot 3^{2n}$ on geometrinen, sillä

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4 \cdot 3^{2(n+1)}}{4 \cdot 3^{2n}} = \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} = 3^{2n+2-2n} = 3^2 = 9 \text{ kaikilla } n.$$

Jokainen geometrinen jono on muotoa

$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3, \ldots,$

missä $a_1 \neq 0$.

Jonon n. jäsen on

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Jos ensimmäinen luku $a_1 = 5$ ja $q = -2$, saadaan geometrinen jono $5,\ -10,\ 20,\ -40, \ldots$. Jonon 12. jäsen on $a_{12} = 5 \cdot (-2)^{11} = -10\,240$. Yleisesti $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$.

Jos $a_1 \neq 0$, niin myös jono

$a_1,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots,$

jossa $q = 0$, luetaan geometristen jonojen joukkoon.

Geometrinen summa

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *geometriseksi summaksi.*

ESIMERKKI 4

Geometrisen jonon kolmen ensimmäisen jäsenen summa on 3 ja kuuden ensimmäisen jäsenen summa 195. Määritä jonon ensimmäinen jäsen a ja jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku q.

Ratkaisu

Geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2, \ldots$

kuuden ensimmäisen jäsenen summa on

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 = a + aq + aq^2 + q^3(a + aq + aq^2),$$

missä $a + aq + aq^2$ on jonon kolmen ensimmäisen jäsenen summa.

Sijoittamalla summien arvot saadaan yhtälö.

$$195 = 3 + 3q^3$$

$$3q^3 = 192 \qquad | : 3$$

$$q^3 = 64$$

$$q = \sqrt[3]{64} = 4$$

Jonon kolmen ensimmäisen jäsenen summa on

$$a + a \cdot 4 + a \cdot 4^2 = 21a.$$

Koska $21a = 3$, niin $a = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Vastaus $a = \frac{1}{7}$, $q = 4$

Geometrisen summan kaava

Geometrisen jonon a, aq, aq^2, ... , missä $q \neq 1$, n:n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Kaavassa
a on ensimmäinen yhteenlaskettava,
q on peräkkäisten jäsenten suhdeluku,
n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Jos $q = 1$, geometrinen jono on vakiojono a, a, ... , jolloin n:n ensimmäisen jäsenen summa on na.

Lasketaan summan $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k 3^k$ arvo. Kyseessä on geometrinen summa $1 - 3 + 3^2 - ... + 3^{10}$, jonka ensimmäinen jäsen on 1, peräkkäisten jäsenten suhdeluku -3 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 11. Summan arvo on

$$S_{11} = \frac{1 \cdot (1 - (-3)^{11})}{1 - (-3)} = \frac{1 + 3^{11}}{4} = 44\,287.$$

ESIMERKKI 5

Turpeen määrä turvevoimalan hankinta-alueella riittää nykykulutuksella 60 vuotta. Kuinka monta vuotta turve riittää, jos kulutus kasvaa 3 % joka vuosi?

Ratkaisu Merkitään nykyistä vuotuista kulutusta a. Turpeen määrä on $60a$.

Kulutus ensi vuonna on $1{,}03a$, seuraavana $1{,}03^2a$ jne. Kulutukset muodostavat geometrisen jonon, jossa $q = 1{,}03$. Kulutus n vuodessa on geometrinen summa

$$S_n = a + 1{,}03a + 1{,}03^2a + \ldots + 1{,}03^{n-1}a$$

$$= \frac{a(1 - 1{,}03^n)}{1 - 1{,}03} = \frac{a(1 - 1{,}03^n)}{-0{,}03}$$

$$= \frac{a(1{,}03^n - 1)}{0{,}03}.$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n \leqslant 60a$.

$$\frac{a(1{,}03^n - 1)}{0{,}03} \leqslant 60a \qquad \big| : a > 0$$

$$\frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \leqslant 60 \qquad \big| \cdot 0{,}03 > 0$$

$$1{,}03^n - 1 \leqslant 1{,}8$$

$$1{,}03^n \leqslant 2{,}8$$

$$\ln 1{,}03^n \leqslant \ln 2{,}8$$

$$n \ln 1{,}03 \leqslant \ln 2{,}8 \qquad \big| : \ln 1{,}03 > 0$$

$$n \leqslant \frac{\ln 2{,}8}{\ln 1{,}03} \approx 34{,}8$$

Turve riittää 34 vuotta.

Vastaus 34 vuotta

Harjoituksia

583. Geometrinen jono alkaa $3,\ 12,\ \ldots$. Määritä jonon kymmenes jäsen ja jonon n. jäsenen lauseke.

584. Geometrisessa jonossa (a_n) on $a_1 = 7$ ja $a_5 = 567$. Määritä jonon peräkkäisten jäsenten suhde q ja jonon 10. jäsen a_{10}.

585. Geometrinen jono alkaa $3,\ -6,\ 12,\ \ldots$. Laske jonon 13 ensimmäisen jäsenen summa.

586. Laske geometrisen summan kaavalla summa $\sum_{k=0}^{7} 4 \cdot 3^{2k}$.

587. Kuinka pitkä aika kuluu 10 000 metrin juoksuun, jos ensimmäinen ratakierros (400 m) juostaan 60,0 sekunnissa ja sen jälkeen jokaiseen kierrokseen kuluu 5 % pitempi aika kuin edelliseen? Anna vastaus minuutteina ja sekunteina sekunnin kymmenesosan tarkkuudella.

Rekursiivinen lukujono

Jono, jonka jäsenet määritellään jonon edeltävien jäsenten avulla, on *rekursiivinen lukujono*.

Oletetaan esimerkiksi, että kalastuskauden alussa lammessa on 4 000 kirjolohta. Lohista kalastetaan joka viikko 15 %, ja aina seuraavan viikon alussa lampeen tuodaan 400 kalaa. Jos a_n on lohien määrä n. viikon alussa, niin

$a_1 = 4\,000$ ja $a_n = 0{,}85a_{n-1} + 400$, kun $n \geqslant 2$,

eli

$a_1 = 4\,000$ ja $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 400$, kun $n \geqslant 1$.

Jonon jäseniä voidaan laskea laskimen [Ans] -näppäimen avulla.

Laskukaava, joka ilmaisee, kuinka rekursiivisen jonon (a_n) jäsen a_n lasketaan edeltävistä jäsenistä, on jonon *rekursiokaava*.

Rekursiivisille jonoille, joiden rekursiokaava on muotoa

$a_n = qa_{n-1} + b$,

voidaan muodostaa lauseke geometrisen summan avulla.

ESIMERKKI 6

Pankkitilin korko on 3,00 %. Kuinka suuri pääoma tilillä tulee vähintään olla vuoden 2012 alussa, jotta tililtä voitaisiin vuonna 2013 aloittaen nostaa kymmenen peräkkäisen vuoden alussa 3 000 euroa? Korko lisätään pääomaan aina vuoden lopussa.

Ratkaisu

Merkitään tilillä vuoden 2012 alussa olevaa pääomaa a (euroa).

Pääoma kasvaa joka vuosi 1,03-kertaiseksi ja pienenee seuraavan vuoden alussa 3 000 euroa. Pääoman suuruudet peräkkäisten vuosien alussa noston jälkeen muodostavat jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jossa

$a_1 = a$ ja $a_n = 1{,}03a_{n-1} - 3\,000$, kun $n \geqslant 2$.

Päätellään jonon lauseke.

$a_1 = a$

$a_2 = 1{,}03a - 3\,000$

$a_3 = 1{,}03a_2 - 3\,000 = 1{,}03^2a - 1{,}03 \cdot 3\,000 - 3\,000$

$a_4 = 1{,}03a_3 - 3\,000 = 1{,}03^3a - 1{,}03^2 \cdot 3\,000 - 1{,}03 \cdot 3\,000 - 3\,000$

Havaitaan, että

$$a_n = 1{,}03^{n-1}a - 1{,}03^{n-2} \cdot 3\,000 - 1{,}03^{n-3} \cdot 3\,000 - \ldots - 1{,}03 \cdot 3\,000 - 3\,000$$

$$= 1{,}03^{n-1}a - (1{,}03^{n-2} \cdot 3\,000 + 1{,}03^{n-3} \cdot 3\,000 + \ldots + 1{,}03 \cdot 3\,000 + 3\,000)$$

$$= 1{,}03^{n-1}a - \frac{3\,000(1 - 1{,}03^{n-1})}{1 - 1{,}03}$$

$$= 1{,}03^{n-1}a - \frac{3\,000(1{,}03^{n-1} - 1)}{0{,}03}$$

$$= 1{,}03^{n-1}a - 100\,000(1{,}03^{n-1} - 1).$$

Siis

$a_n = 1{,}03^{n-1}a - 100\,000(1{,}03^{n-1} - 1)$.

Alkupääoma on pienin mahdollinen, kun $a_{11} = 0$. Ratkaistaan yhtälö.

$$1{,}03^{10}a - 100\,000(1{,}03^{10} - 1) = 0$$

$$1{,}03^{10}a = 100\,000(1{,}03^{10} - 1) \qquad | : 1{,}03^{10}$$

$$a \approx 25\,590{,}61 \text{ (euroa)}$$

Vastaus vähintään 25 590,61 euroa

Harjoituksia

588. Jonossa (a_n) on $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$, kun $n \geqslant 1$. Laske jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.

589. Jonossa (a_n) on $a_1 = 718$ ja $a_n = a_{n-1} - 9$, kun $n \geqslant 2$. Muodosta jonon lauseke ja määritä jonon 39. jäsen.

590. Koulun kirjaston kirjoista joka lukuvuosi 8 % katoaa tai kuluu käyttökelvottomaksi. Ennen uuden lukuvuoden alkua on varaa hankkia 250 uutta kirjaa. Lukuvuoden alkaessa vuonna 2007 kirjastossa oli 8 200 kirjaa. Kuinka monta kirjaa kirjastossa on lukuvuoden alkaessa vuonna 2017?

TEHTÄVIÄ

591. Millä x:n arvolla luvut 2^x, 2^{2x+1} ja 2^{4x-2} ovat geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä?

592. Millä x:n arvoilla luvut $\cos^2 x$, $\sin x$ ja $\sin^2 x$ ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä?

593. Kaivoksen malmivarat riittävät nykyisellä louhintatahdilla 100 vuotta. Kuinka monta vuotta malmivarat riittävät, jos louhintamäärää lisätään 2 % joka vuosi?

594. Metsäpalstan puuston määräksi arvioitiin vuoden 1988 alussa 100 m^3 ja sen vuotuiseksi kasvuksi 17 %. Metsästä myydään vuodesta 1988 alkaen joka vuoden lopussa 16 m^3 puuta. Minkä vuoden alussa metsässä on puuta yli 120 m^3? (Ylioppilaskoe, k. 1988)

595. Ensimmäisen pallon sisään piirretään kuutio, kuution sisään toinen pallo ja taas pallon sisään kuutio ja kuution sisään kolmas pallo jne. Kuinka mones pallo on ensimmäinen, jonka tilavuus on vähemmän kuin miljardisosa ensimmäisen pallon tilavuudesta?

596. Säästäminen sapattivuotta varten aloitettiin vuoden 2005 alussa. Joka vuoden alussa talletetaan 1 000 euroa tilille, jolle aina vuoden lopussa lisätään 2,50 %:n korko.
a) Mikä tilin pääoma on vuoden 2013 lopussa koron lisäämisen jälkeen?
b) Minkä vuoden lopussa tilin pääoma ensimmäisen kerran ylittää 20 000 euroa?

597. Osoita, että lukujono (a_n), jossa $a_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, on aidosti kasvava ja että jonon kaikki jäsenet ovat pienempiä kuin 2.

598. Marjo aloitti kunnonkohotusohjelman, jonka mukaan ensimmäisellä viikolla juostaan 6 kilometriä ja juoksumatkaa pidennetään joka viikko 500 metriä. Kuinka monen viikon jälkeen yhteenlaskettu juoksumatka ylittää 1 000 km?

599. Joukko koostuu parillisesta määrästä peräkkäisiä luonnollisia lukuja. Näytä, että joukon lukujen keskiarvo ei ole luonnollinen luku. (Ylioppilaskoe, k. 1997)

600. Geometrisen jonon kahden ensimmäisen jäsenen summa on 16 ja kuuden ensimmäisen jäsenen summa 21. Määritä jonon ensimmäinen jäsen ja peräkkäisten jäsenten suhdeluku q.

601. Määritä lukujonon $\dfrac{n^4}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ suurin luku. Perustelu. (Ylioppilaskoe, s. 1996)

602. Lukujonolle (a_n) pätee $\sum_{k=1}^{n} a_k = 6n^2 - 4n$ kaikilla $n \geqslant 1$. Määritä jonon (a_n) sadas jäsen. Osoita, että jono (a_n) on aritmeettinen.

603. Lukujono (x_n) määritellään seuraavasti: $x_0 = 0$, $x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Johda lauseke luvulle x_n ja tutki, mitä lukua jonon jäsenet lähenevät, kun n suurenee rajatta.

604. Olkoon $a_1 = 1\,000$ ja $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, kun $n \geqslant 2$. Mistä n:n arvosta lähtien jonon kymmenen peräkkäisen jäsenen tulo $a_n a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ on pienempi kuin $0{,}001$?

605. Muodosta lauseke lukujonon

$\ln(1 + \frac{1}{1}),\ \ln(1 + \frac{1}{2}),\ \ln(1 + \frac{1}{3}), \ldots$

n:n ensimmäisen jäsenen summalle S_n. Kuinka monta ensimmäistä jonon jäsentä tulee vähintään laskea yhteen, jotta summan arvo olisi suurempi kuin 10?

606. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on

$$\frac{3^n - 1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} < \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

607. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{n!}{n^n}$, missä $n = 1, 2, \ldots$, on aidosti vähenevä.
(Ylioppilaskoe, k. 1988)

608. Tutki, mikä jonon $a_n = \frac{n^{1000}}{n^n}$, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$, jäsenistä on suurin. Määritä suurimman jäsenen likiarvo kahden numeron tarkkuudella.

Todennäköisyyslaskenta

Todennäköisyys

Klassinen todennäköisyys

Satunnaisilmiön tulosmahdollisuuksia kutsutaan *alkeistapauksiksi* ja alkeistapausten joukkoa *perusjoukoksi*.

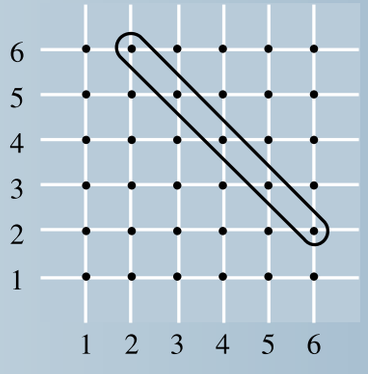
Tapahtuma on perusjoukon osajoukko. Alkeistapaukset, joista tapahtuma muodostuu, ovat *tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia*.

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdolliset eli *symmetriset*, tapahtuman A todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{perusjoukon alkeistapausten lukumäärä}}.$$

Kun heitetään kahta noppaa, perusjoukko muodostuu 36:sta yhtä mahdollisesta alkeistapauksesta (1, 1), (1, 2), (1, 3) jne. Tapahtumalle A: ”silmälukujen summa on 8” suotuisat alkeistapaukset ovat (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) ja (6, 2). Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on 5, joten $\mathrm{P}(A) = \frac{5}{36}$.

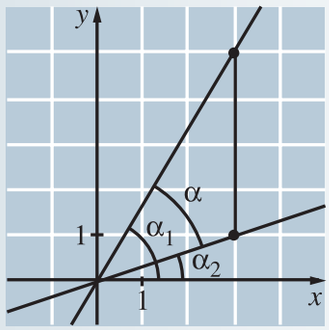
Kahden nopan heiton alkeistapauksia voidaan havainnollistaa koordinaatiston pisteinä.



Geometrinen todennäköisyys

Alkeistapausten määrän mitta voi myös olla geometrinen mitta, esimerkiksi pituus, pinta-ala tai kulman suuruus.

Lasketaan esimerkiksi, millä todennäköisyydellä origon kautta piirretty umpimähkäinen suora leikkaa pisteiden $(3, 1)$ ja $(3, 5)$ kautta kulkevan janan. Suora leikkaa janan, jos se kulkee janan päätepisteiden kautta kulkevien suorien välissä. Suorien välisen kulman α suuruus voidaan laskea esimerkiksi suuntakulmien erotuksena:



Koska $\tan\alpha_1 = \frac{5}{3}$, niin $\alpha_1 \approx 59{,}04°$, ja koska

$\tan\alpha_2 = \frac{1}{3}$, niin $\alpha_2 \approx 18{,}43°$.

Siis $\alpha \approx 59{,}04° - 18{,}43° = 40{,}61°$ ja $\mathrm{P}(\text{leikkaa janan}) = \frac{40{,}61°}{180°} \approx 0{,}23$.

ESIMERKKI 1

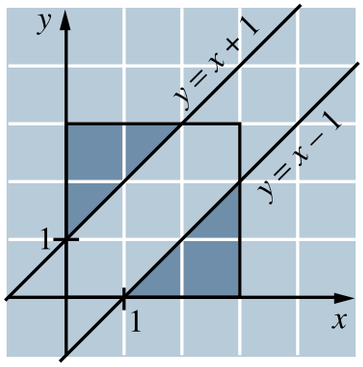
Väliltä $[0, 3]$ arvotaan kaksi satunnaislukua. Millä todennäköisyydellä lukujen etäisyys on suurempi kuin 1?

Ratkaisu

Merkitään lukuja x ja y. Lukujen etäisyys on $|y - x|$. Epäyhtälö $|y - x| > 1$ toteutuu, kun $y - x > 1$ tai $y - x < -1$ eli kun $y > x + 1$ tai $y < x - 1$.

Lukujen x ja y arpominen vastaa pisteen (x, y) arpomista neliöstä $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$.

Epäyhtälö $y > x + 1$ toteutuu suoran $y = x + 1$ yläpuolella. Epäyhtälö $y < x - 1$ toteutuu suoran $y = x - 1$ alapuolella.



Kysytty todennäköisyys on erottuvien kolmioiden yhteenlasketun pinta-alan 4 suhde koko neliön pinta-alaan 9. Siis

$\mathrm{P}(|y - x| > 1) = \frac{4}{9}$.

Vastaus

$\frac{4}{9} \approx 0{,}44$

Tilastollinen todennäköisyys

Tapahtuman *kokeellinen* eli *tilastollinen todennäköisyys* lasketaan tilastoista.

Pitkäaikaisten syntyvyystilastojen mukaan 51,2 % syntyvistä lapsista on poikia. Siis P(syntyvä lapsi on poika) ≈ 0,512.

Harjoituksia

609. Heitetään tavallista noppaa ja säännöllisen nelitahokkaan muotoista noppaa, jossa on silmäluvut 1–4. Millä todennäköisyydellä a) silmälukujen summa on 6 b) tavallisen nopan silmäluku on pienempi?

610. Väliltä $[-2, 2]$ arvotaan luku. Millä todennäköisyydellä arvottu luku toteuttaa epäyhtälön $x^2 + 2x - 3 < 0$?

611. Millä todennäköisyydellä origosta satunnaiseen suuntaan lähetetty xy-tasossa kulkeva valonsäde osuu pisteitä $(2, -1)$ ja $(2, 3)$ yhdistävään janaan?

612. Kyselyn mukaan lukion 328 opiskelijasta 241 on tyytyväisiä opetukseen, 208 on tyytyväisiä kouluruokaan ja 167 on tyytyväisiä sekä opetukseen että kouluruokaan.
a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kouluruokaan tyytyväinen opiskelija on tyytyväinen myös opetukseen?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu lukion opiskelija on tyytymätön joko opetukseen tai kouluruokaan?

Diskreetti satunnaismuuttuja

Jakauma

Muuttuja, jonka arvot määrää sattuma, on *satunnaismuuttuja*. Jos satunnaismuuttujan arvot ovat erillisiä lukuja, kyseessä on *diskreetti satunnaismuuttuja*.

Diskreetin satunnaismuuttujan X *jakauma* tunnetaan, kun tiedetään satunnaismuuttujan mahdolliset arvot $x_1, \ldots, x_n$ ja näiden arvojen todennäköisyydet $p_1, \ldots, p_n$, missä siis

$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$.

Todennäköisyyksien $p_1, \ldots, p_n$ summa on 1:

$p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Heli pelaa uhkapeliä, jossa heitetään kahta kolikkoa. Jos tulee kaksi klaavaa, Heli menettää kolme tulitikkua. Jos tulee yksi klaava, Heli menettää yhden tikun. Jos ei tule yhtään klaavaa, Heli voittaa viisi tikkua.
Olkoon satunnaismuuttuja X Helin voitto yhdellä kierroksella.
Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -3, -1 ja 5 (tulitikkua).
Satunnaismuuttujan X jakauma on:*

$\mathrm{P}(X = -3) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X = 5) = \frac{1}{4}$.

Odotusarvo

Diskreetin satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n.$$

Odotusarvoa laskettaessa satunnaismuuttujan jokainen mahdollinen arvo kerrotaan todennäköisyydellään ja tulot lasketaan yhteen.

Kun satunnaiskoetta, johon satunnaismuuttuja X liittyy, toistetaan pitkään ja aina kirjataan satunnaismuuttujan X arvo, niin satunnaismuuttujan saamien arvojen keskiarvo lähenee odotusarvoa.

Esimerkiksi edellä kuvatun satunnaismuuttujan X (Helin voitto yhdellä kierroksella) odotusarvo on

---

* Tarkistukseksi kannattaa laskea, että todennäköisyyksien summa on 1.

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 5 = 0 \text{ (tulitikkua).}$$

Voidaan ennakoida, että peliä pitkään pelattaessa Heli pysyy suurin piirtein omillaan.

Keskihajonta

Diskreetin satunnaismuuttujan X *keskihajonta* on

$$D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2}.$$

Kaavassa on satunnaismuuttujan odotusarvoa $E(X)$ merkitty kirjaimella μ.*

Kun lasketaan keskihajonta, niin jokaisen muuttujan arvon x_i odotusarvosta μ lasketun poikkeaman neliö kerrotaan vastaavalla todennäköisyydellä p_i. Saadut tulot lasketaan yhteen. Keskihajonta on summan neliöjuuri.

Keskihajonta mittaa, kuinka satunnaismuuttujan arvot kasautuvat odotusarvon läheisyyteen.

Lasketaan esimerkiksi edellä kuvatun satunnaismuuttujan X (Helin voitto yhdellä kierroksella) keskihajonta. Keskihajonnan neliö (ns. *varianssi*) on

$$D^2(X) = \frac{1}{4} \cdot (-3 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0)^2 + \frac{1}{4} \cdot (5 - 0)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 25 = 9.$$

Keskihajonta on $D(X) = \sqrt{9} = 3$.

---

* Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon ja keskihajonnan kaavat ovat taulukkokirjassa.

Harjoituksia

613. Onnenpyörä on jaettu 20:een yhtä suureen sektoriin, joista neljällä saa 10 euron voiton ja yhdellä 50 euron voiton. Pelikierros maksaa 5 euroa. Matti pelaa yhden pelin. Olkoon satunnaismuuttuja X Matin nettovoitto. Määritä satunnaismuuttujan X a) jakauma b) odotusarvo.

614. Heitetään säännöllisen nelitahokkaan muotoista noppaa, jossa on silmäluvut 1–4. Laske
a) silmäluvun odotusarvo b) silmäluvun neliön odotusarvo.

Kombinatoriset menetelmät

Tuloperiaate

Klassisia todennäköisyyksiä laskettaessa tarvitaan erilaisia menetelmiä laskea lukumääriä. Monet näistä ns. kombinatorisista menetelmistä perustuvat *tuloperiaatteeseen*:

Oletetaan, että kokonaisuuden valitseminen voidaan jakaa peräkkäisiin vaiheisiin. Jos vaiheita on k kappaletta ja

1. vaiheessa on n_1 vaihtoehtoa
2. vaiheessa on n_2 vaihtoehtoa
.
.
.
k. vaiheessa on n_k vaihtoehtoa,

niin kokonaisuus voidaan valita $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ eri tavalla.

Oletetaan esimerkiksi, että avaimessa on seitsemän lovea, joista jokaisen syvyys voi vaihdella viidellä eri tavalla, ja lasketaan, kuinka monta erilaista avainta on.
1. loven syvyydelle on 5 vaihtoehtoa, 2. loven syvyydelle on 5 vaihtoehtoa jne. Tuloperiaatteen nojalla erilaisten avainten lukumäärä on

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{\text{7 kpl}} = 5^7 = 78\,125.$$

ESIMERKKI 2

Noppaa heitetään neljästi. Millä todennäköisyydellä a) joka heitolla saadaan eri silmäluku b) jokin silmäluku tulee useammin kuin yhden kerran?

Ratkaisu

a) Valitaan alkeistapauksiksi neljän heittotuloksen jonot. Koska jokaiselle heittotulokselle on 6 vaihtoehtoa, niin tuloperiaatteen nojalla kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$.

Tapahtumalle ”joka heitolla eri silmäluku” suotuisia ovat sellaiset neljän heittotuloksen jonot, joissa mikään tulos ei toistu. Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

$$\text{P(joka heitolla eri silmäluku)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} \approx 0{,}28$$

b) Tapahtuma ”jokin silmäluku tulee useammin kuin kerran” on tapahtuman ”joka heitolla eri silmäluku” vastatapahtuma. Siis

$$\text{P(jokin silmäluku toistuu)} = 1 - \text{P(joka heitolla eri silmäluku)} \approx 0{,}72.$$

Vastaus a) 0,28 b) 0,72

ESIMERKKI 3

Pelaajalle jaetaan viisi pelikorttia. Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi korteista on keskenään samanarvoisia?

Ratkaisu Lasketaan ensin vastatapahtuman ”kaikki kortit eriarvoisia” todennäköisyys.

Valitaan alkeistapauksiksi viiden kortin jonot ilman takaisinpanoa.*

Tuloperiaatteen nojalla kaikkien alkeistapausten lukumäärä on
$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$.

Tapahtumalle ”kaikki kortit eriarvoisia” suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36$.

Siis

$$\text{P(kaikki eriarvoisia)} = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

ja

$$\text{P(ainakin kaksi samanarvoista)} = 1 - \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \qquad \text{P}(A) = 1 - \text{P}(\overline{A})$$

$$\approx 0{,}49.$$

Vastaus 0,49

---

* Koska korttia ei ennen seuraavan kortin jakamista panna takaisin pakkaan, seuraavalla kortilla on aina yksi vaihtoehto vähemmän. Siis jono muodostuu *ilman takaisinpanoa*. Esimerkin 2 kaikkien alkeistapausten lukumäärää laskettaessa noppatulosten jono muodostettiin *takaisinpanolla*, eli vaihtoehtojen lukumäärä 6 oli joka vaiheessa sama. Usein on tärkeää selvittää, tapahtuuko tutkittavassa satunnaiskokeessa takaisinpano vai ei.

Järjestysten ja jonojen lukumäärä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tulo $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ on luvun n *kertoma*, ja se merkitään $n!$. Siis

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Lisäksi sovitaan

$0! = 1$.

Tuloperiaatteesta seuraa: jos joukossa on n alkiota, joukon alkiot voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.

Luvun kertoma voidaan laskea laskimen näppäimellä [!] tai [n!].

Tietosanakirjan 10 osaa voidaan sijoittaa kirjahyllyyn $10!$ eri järjestykseen. Jos lukutaidoton lapsi järjestää kirjat hyllyyn, niin

$$\text{P(kirjat ovat oikeassa järjestyksessä)} = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3\,628\,800}.$$

Kun n:n alkion joukosta valitaan k:n alkion jono ilman takaisinpanoa, niin mahdollisten jonojen lukumäärä on

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}_{k \text{ tekijää}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Tulossa on k:n peräkkäisen kokonaisluvun tulo laskettuna luvusta n alaspäin.

Lausekkeen arvo voidaan laskea laskimen näppäimellä [nPr].*

Lasketaan esimerkiksi, kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan laatia 27 opiskelijalle luokassa, jossa on 35 pulpettia. Istumajärjestys voidaan ajatella muodostettavan niin, että valitaan pulpetti aakkosjärjestyksessä 1. opiskelijalle (35 vaihtoehtoa), 2. opiskelijalle (34 vaihtoehtoa) jne. Erilaisten istumajärjestysten lukumäärä on

$$\underbrace{35 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 9}_{27 \text{ tekijää}} = \frac{35!}{8!} \approx 2{,}6 \cdot 10^{35}.$$

---

* n:n alkion joukosta muodostettuja k:n alkion jonoja kutsutaan myös joukon *k-variaatioiksi* ja niiden lukumäärää merkitään $(n)_k$. Merkintä ja laskukaava

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

on taulukkokirjassa.

Osajoukkojen lukumäärä

n:n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lausekkeita $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*.

Yllä olevan määritelmän lisäksi sovitaan

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Binomikertoimen arvo voidaan laskea laskimen näppäimellä nCr.

Lottoriviin arvotaan seitsemän lukua 39 luvun joukosta. Erilaisten lottorivien lukumäärä on $\binom{39}{7} = 15\,380\,937$. Todennäköisyys saada lotossa yhdellä rivillä seitsemän oikein on

$$\text{P(7 oikein)} = \frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

ESIMERKKI 4

Kunnanvaltuustossa on 15 naista ja 10 miestä. Valtuustosta valitaan arvalla seitsemänjäseninen toimikunta. Millä todennäköisyydellä toimikuntaan tulee
a) pelkkiä naisia b) neljä naista ja kolme miestä?

Ratkaisu

Valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukon seitsemän valtuutetun osajoukot.*

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{25}{7}$.

---

* a-kohdan todennäköisyys voidaan laskea myös valitsemalla alkeistapauksiksi seitsemän valtuutetun jonot, jolloin $\text{P(pelkkiä naisia)} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}$.

a) Tapahtumalle ”pelkkiä naisia” suotuisia alkeistapauksia ovat 15 naisvaltuutetun joukosta valitut 7 valtuutetun osajoukot. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{7}$.

$$\text{P(pelkkiä naisia)} = \frac{\binom{15}{7}}{\binom{25}{7}} = \frac{6\,435}{480\,700} \approx 0{,}013$$

b) Tapahtumalle ”neljä naista ja kolme miestä” suotuisia ovat seitsemän valtuutetun osajoukot, joissa on neljä naista ja kolme miestä.

Valitaan osajoukkoon ensin naisjäsenet ja sitten miesjäsenet.

Valitaan 4 naista 15 naisen joukosta: $\binom{15}{4}$ vaihtoehtoa.

Valitaan 3 miestä 10 miehen joukosta: $\binom{10}{3}$ vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{4} \cdot \binom{10}{3}$, joten

$$\text{P(4 naista ja 3 miestä)} = \frac{\binom{15}{4}\binom{10}{3}}{\binom{25}{7}} = \frac{1\,365 \cdot 120}{480\,700} \approx 0{,}34.$$

Vastaus a) 0,013 b) 0,34

Harjoituksia

615. Monivalintakokeessa on yhdeksän tehtävää, joista jokaisessa valitaan yksi neljästä vaihtoehdosta. Kuinka monella eri tavalla opiskelija voi koerivinsä täyttää?

616. Perheessä on kolme lasta, joiden joukossa ei ole kaksosia. Millä todennäköisyydellä a) kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä
b) ainakin kaksi lasta on syntynyt samana viikonpäivänä?

617. Pakasta vedetään neljä korttia. Millä todennäköisyydellä a) kaikki ovat samaa maata b) kaikki ovat eri maata c) ainakin kaksi on samaa maata?

618. Henkilö lottoaa yhden rivin (7 numeroa 39:stä). Mikä on todennäköisyys, ettei hän saa yhtään oikein? (Ylioppilaskoe, k. 1991)

619. Arpoja on jäljellä 20, joista kahdeksan on voittoarpoja. Ville ostaa viisi arpaa. Millä todennäköisyydellä hän a) ei saa yhtään voittoa b) saa ainakin yhden voiton c) saa kaksi voittoa?

Todennäköisyyksien laskusääntöjä

Vastatapahtuma

Tapahtuman A vastatapahtuma on tapahtuma $\overline{A}$: ”A ei tapahdu”.

Esimerkiksi tapahtuman ”viidellä arvalla ei saada yhtään voittoa” vastatapahtuma on ”vähintään yksi arpa voittaa”, ja tapahtuman ”vähintään kaksi arpaa voittaa” vastatapahtuma on ”enintään yksi arpa voittaa”.

Tapahtuman A ja vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyyksien summa on 1.

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1,$$

jolloin

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}).$$

Yleinen kertolaskusääntö

Olkoot A ja B kaksi tapahtumaa. Todennäköisyys, että B tapahtuu, kun A on tapahtunut, on *tapahtuman B todennäköisyys ehdolla A*. Tapahtuman B todennäköisyys ehdolla A merkitään $\mathrm{P}(B|A)$.

Vedetään esimerkiksi pakasta kaksi korttia. Olkoon tapahtuma A ”ensimmäinen kortti on pata” ja tapahtuma B ”toinen kortti on pata”. Tällöin

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{12}{51} \text{ ja } \mathrm{P}(B|\overline{A}) = \frac{13}{51}.$$

Todennäköisyys, että molemmat tapahtumat A ja B tapahtuvat, on

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A).$$

Yleinen kertolaskusääntö pätee myös useammalle tapahtumalle. Esimerkiksi

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3|A_1 \text{ ja } A_2).$$

Siis jokaiselle tapahtumalle lasketaan ehdollinen todennäköisyys, että tapahtuma tapahtuu, kun kaikki edeltävät tapahtumat ovat tapahtuneet.

Pakasta nostetaan neljä korttia. Lasketaan yleisen kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, että kaikki kortit ovat patoja. Ajatellaan, että kortit nostetaan yksitellen peräkkäin, ja lasketaan jokaiselle kortille todennäköisyys, että kortti on pata ehdolla, että kaikki edelliset ovat patoja. Saadaan

$$\mathrm{P}(\text{kaikki patoja}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \approx 0{,}0026.$$

Todennäköisyydelle saatu lauseke on samannäköinen kuin lauseke, joka saadaan, kun lasketaan tapahtuman todennäköisyys käyttämällä alkeistapauksina neljän kortin jonoja. Tällöin saadaan

$$\mathrm{P}(\text{kaikki patoja}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}.$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö

Tapahtumat A ja B ovat *toisistaan riippumattomat*, jos toisen tapahtuman todennäköisyys ei riipu siitä, onko toinen tapahtunut vai ei. Tällöin on $P(B|A) = P(B)$ ja

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, niin todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat, on A:n ja B:n todennäköisyyksien tulo.

Suomalaiset jakautuvat eri veriryhmiin seuraavasti: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Todennäköisyys, että kaksi satunnaisesti valittua suomalaista M ja N kuuluvat molemmat A-ryhmään, on

$$\begin{aligned} P(\text{M on A ja N on A}) &= P(\text{M on A}) \cdot P(\text{N on A}) \\ &= 0{,}44 \cdot 0{,}44 \approx 0{,}19. \end{aligned}$$

ESIMERKKI 5

Ikäluokkaan 20–24 vuotta kuuluvista suomalaista miehistä 5,2 % ja naisista 11,9 % on naimisissa. Koolla on ikäluokasta arvottu ryhmä, jossa on kahdeksan miestä ja viisi naista. Millä todennäköisyydellä ryhmän jäsenistä

a) vähintään yksi on naimisissa

b) vähintään yksi mies ja vähintään yksi nainen on naimisissa?

Ratkaisu

a) Todennäköisyys, että mies on naimisissa, on 0,052, ja todennäköisyys, että mies ei ole naimisissa, on $1 - 0{,}052 = 0{,}948$.
Todennäköisyys, että nainen on naimisissa, on 0,119, ja todennäköisyys, että nainen ei ole naimisissa, on $1 - 0{,}119 = 0{,}881$.

Saadaan (lyhennetään N = naimisissa):

$$\begin{aligned} &P(\text{vähintään yksi N}) = 1 - P(\text{ei kukaan N}) && P(A) = 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - P(\text{ei kukaan mies N ja ei kukaan nainen N}) && P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) \\ &= 1 - P(\text{ei kukaan mies N}) \cdot P(\text{ei kukaan nainen N}) \\ &= 1 - 0{,}948^8 \cdot 0{,}881^5 \approx 0{,}65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{vähintään yksi mies N ja vähintään yksi nainen N}) && P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) \\ &= P(\text{vähintään yksi mies N}) \cdot P(\text{vähintään yksi nainen N}) \\ &= (1 - P(\text{ei kukaan mies N})) \cdot (1 - P(\text{ei kukaan nainen N})) \\ &= (1 - 0{,}948^8) \cdot (1 - 0{,}881^5) \approx 0{,}16 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,65 b) 0,16

Yleinen yhteenlasku-sääntö

Todennäköisyys, että ainakin toinen tapahtumista A ja B tapahtuu, on

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B).$$

Tapahtumien A ja B todennäköisyyksien summasta vähennetään tapahtuman ”sekä A että B tapahtuvat” todennäköisyys.

Pakasta vedetään kaksi korttia. Lasketaan tapahtuman ”molemmat kortit ovat patoja tai molemmat kortit ovat kuvakortteja” todennäköisyys. (Kuvakortteja ovat sotamies, kuningatar, kuningas ja ässä). Jos A on tapahtuma ”molemmat patoja” ja B on tapahtuma ”molemmat kuvakortteja”, niin P(molemmat patoja tai molemmat kuvia)

= P(molemmat patoja) + P(molemmat kuvia) – P(molemmat patoja ja kuvia).

Pakassa on 16 kuvakorttia ja 4 sellaista korttia, jotka ovat patoja ja kuvakortteja. Käyttäen alkeistapauksina kahden kortin jonoja saadaan

$$\mathrm{P}(\text{molemmat patoja tai molemmat kuvia}) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} + \frac{16 \cdot 15}{52 \cdot 51} - \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}$$

$\approx 0{,}14.$

Poissulkevien tapahtumien yhteenlasku-sääntö

Tapahtumat A ja B ovat *toisensa poissulkevia* eli *erillisiä*, jos toisen tapahtuessa toinen ei voi tapahtua. Tällöin on $\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = 0$ ja

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Jos tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, niin todennäköisyys, että jompikumpi tapahtumista A ja B tapahtuu, on A:n ja B:n todennäköisyyksien summa.

Suomalaiset jakautuvat eri veriryhmiin seuraavasti: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Lasketaan, millä todennäköisyydellä kaksi satunnaisesti valittua suomalaista M ja N kuuluvat samaan veriryhmään. Tapahtuma ”molemmat kuuluvat samaan veriryhmään” voidaan jakaa neljään toisensa poissulkevaan vaihtoehtoon:

molemmat A tai molemmat B tai molemmat AB tai molemmat O.

Siten P(kuuluvat samaan)
= P(molemmat A) + P(molemmat B) + P(molemmat AB) + P(molemmat O)
$= 0{,}44 \cdot 0{,}44 + 0{,}17 \cdot 0{,}17 + 0{,}08 \cdot 0{,}08 + 0{,}31 \cdot 0{,}31 \approx 0{,}33.$

Harjoituksia

620. Jousiampuja H saa laukauksistaan kymppiin keskimäärin 70 % ja jousiampuja M keskimäärin 80 %. Kumpikin ampuu kerran. Millä todennäköisyydellä a) molemmat osuvat kymppiin b) toinen osuu kymppiin ja toinen ei osu c) ainakin toinen osuu kymppiin?

621. a) Kahta noppaa heitetään kerran. Millä todennäköisyydellä tulee kuutospari?
b) Kahta noppaa heitetään kymmenen kertaa. Millä todennäköisyydellä tulee ainakin yksi kuutospari?

622. Millä todennäköisyydellä kuusilapsisen perheen kaikki lapset ovat samaa sukupuolta? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.

623. Marian koulumatkalla on kolmet liikennevalot, jotka toisistaan riippumatta ovat punaisella 75 %, 65 % ja 60 % ajasta. Millä todennäköisyydellä Maria joutuu koulumatkallaan pysähtymään valoihin tasan yhden kerran?

624. Arvioidaan, että poutapäivää seuraa poutapäivä todennäköisyydellä 0,7 ja sadepäivää sadepäivä todennäköisyydellä 0,4. Tänään on sadepäivä. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna on poutapäivä?

Toistokoe

Toistetaan samaa satunnaiskoetta ja jokaisella toistolla seurataan, tapahtuuko tapahtuma A. Jos toistot ovat toisistaan riippumattomat eli A:n todennäköisyys yksittäisessä toistossa ei riipu edeltävien kokeiden tuloksista, on kyseessä *toistokoe*.

Ostetaan yksitellen arpoja arpajaisissa, joissa arpojen kokonaismäärä on suuri ja joissa 35 % arvoista voittaa. Seurataan, voittaako arpa. Jos ostettujen arpojen lukumäärä suhteessa kaikkien arpojen lukumäärään on pieni, voiton todennäköisyys pysyy käytännössä koko ajan samana. Satunnaiskoetta voidaan pitää toistokokeena.

Binomitodennäköisyys

Oletetaan, että tapahtuma A tapahtuu yksittäisessä kokeessa todennäköisyydellä p. Olkoon satunnaismuuttuja X A:n tapahtumiskertojen lukumäärä n-kertaisessa toistokokeessa. Tällöin

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Kaavassa
n on toistojen lukumäärä,
k on A:n tapahtumiskertojen lukumäärä,
p on A:n todennäköisyys yksittäisessä kokeessa.

Kaava on *binomitodennäköisyyden* kaava, ja satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa*.

ESIMERKKI 6

Arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri, 35 % arvoista voittaa. Ostetaan kymmenen arpaa. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään kolme voittoa?

Ratkaisu

Koska arpojen lukumäärä on suuri, arpojen ostamista voidaan pitää kymmenkertaisena toistokokeena. Voiton todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $p = 0{,}35$.

Olkoon satunnaismuuttuja X voittoarpojen lukumäärä. Tällöin

$$\mathrm{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 2) = 1 - (\mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2))$$

$$= 1 - \left(0{,}65^{10} + \binom{10}{1} 0{,}35^1 \cdot 0{,}65^9 + \binom{10}{2} 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^8\right) \approx 0{,}74.$$

Vastaus

0,74

Harjoituksia

625. Arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri, 40 % arvoista voittaa. Vilma ostaa viisi arpaa. Millä todennäköisyydellä hän saa kaksi voittoa?

626. Ampuja osuu savikiekkoon todennäköisyydellä 0,87. Millä todennäköisyydellä 15 savikiekosta särkyy korkeintaan 13?

627. Millä todennäköisyydellä kahdeksanlapsisessa perheessä on yhtä monta tyttöä ja poikaa? Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia.

Jatkuva satunnaismuuttuja

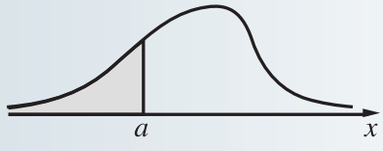
Satunnaismuuttuja, jonka mahdollisten arvojen joukko on lukusuoran väli, on *jatkuva satunnaismuuttuja.*

> Jatkuva satunnaismuuttuja on esimerkiksi väliltä $]0, 1]$ arvotun satunnaisluvun käänteisluku. Satunnaismuuttujan arvojoukko on väli $[1, \infty[$. Jatkuvana satunnaismuuttujana voidaan pitää myös esimerkiksi vastasyntyneen syntymäpainoa.

Jatkuvan satunnaismuuttujan X *jakauman* ilmaisee jakauman *tiheysfunktio*. Tiheysfunktio on kaikkialla epänegatiivinen funktio, jonka kuvaaja rajaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala on 1.*

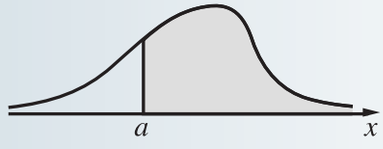
Jatkuvan satunnaismuuttujan X todennäköisyydet ovat tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin eri väleillä rajaamia pinta-aloja:

Todennäköisyys $P(X \leqslant a)$ on kohdan $x = a$ vasemmalle puolelle rajautuva pinta-ala.



Todennäköisyys $P(X \geqslant a)$ on kohdan $x = a$ oikealle puolelle rajautuva pinta-ala.
Erityisesti

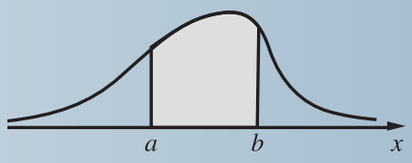
$P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a)$.



* Jatkuvia satunnaismuuttujia on tutkittu tarkemmin syventävässä kurssissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

Todennäköisyys $P(a \leqslant X \leqslant b)$ on välille $[a, b]$ rajautuvan alueen pinta-ala. Erityisesti

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$.



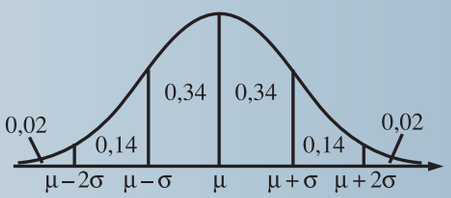
Jatkuvan satunnaismuuttujan kaikki *pistetodennäköisyydet* ovat nollia eli

$P(X = a) = 0$ kaikilla a.

Normaalijakauma

Tärkein jatkuva todennäköisyysjakauma on *normaalijakauma*.

Jokainen normaalijakauma on symmetrinen jakauman odotusarvon μ suhteen. Jakauman laakeuden määrää keskihajonta σ. Keskihajonnan suuruudesta riippumatta normaalijakaumassa on aina enintään yhden, kahden jne. keskihajonnan etäisyydellä odotusarvosta μ sama osuus jakaumasta.



Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona μ ja keskihajontana σ.

Satunnaismuuttujan X arvoa x vastaava *normitettu arvo* z on

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Poikkeama odotusarvosta jaettuna keskihajonnalla.

Normitettu arvo ilmaisee, kuinka monen keskihajonnan verran ja mihin suuntaan arvo x poikkeaa odotusarvosta μ.

Jos x on normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan X arvo ja $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ vastaava normitettu arvo, niin

$$P(X \leqslant x) = P(Z \leqslant z),$$

missä satunnaismuuttuja Z noudattaa *normitettua normaalijakaumaa* eli *standardinormaalijakaumaa*. Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.

Todennäköisyyttä $P(Z \leqslant z)$ on tapana merkitä $\Phi(z)$:

$P(Z \leqslant z) = \Phi(z)$.

Funktio $\Phi(z)$ on normitetun normaalijakauman *kertymäfunktio*.

Normitetun normaalijakauman kertymäfunktion $\Phi(z)$ arvoja positiivisilla z:n arvoilla on taulukkokirjassa. Kun käytetään taulukkoa, niin kertymäfunktion arvot negatiivisilla z:n arvoilla määritetään hyödyntämällä jakauman symmetriaa: $\Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$.

Monilla laskimilla voidaan laskea kertymäfunktion Φ arvoja kaikilla muuttujan arvoilla.

ESIMERKKI 7

Seitsemänvuotiaiden suomalaisten tyttöjen pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskiarvona 125,2 cm ja keskihajontana 6,9 cm. a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun tytön pituus on välillä 115 cm – 130 cm? b) Kuinka pitkiä ovat pisimmät 30 % tytöistä?

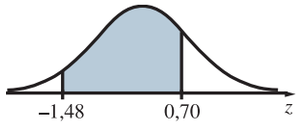
Ratkaisu

a) Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun seitsemänvuotiaan tytön pituus.

On laskettava todennäköisyys $P(115 \leqslant X \leqslant 130)$.

$$P(115 \leqslant X \leqslant 130) = P\left(\frac{115 - 125{,}2}{6{,}9} \leqslant Z \leqslant \frac{130 - 125{,}2}{6{,}9}\right)$$ Normitetaan.

$= P(-1{,}48 \leqslant Z \leqslant 0{,}70)$



$= P(Z \leqslant 0{,}70) - P(Z \leqslant -1{,}48)$

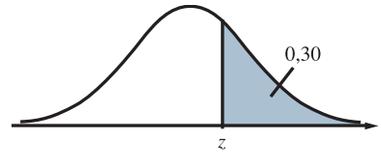
$= \Phi(0{,}70) - \Phi(-1{,}48)$ Jos käytettään taulukkoa, niin arvo $\Phi(-1{,}48)$ määritetään hyödyntämällä symmetriaa: $\Phi(-1{,}48) = 1 - \Phi(1{,}48)$.

$= \Phi(0{,}70) - (1 - \Phi(1{,}48))$

$\approx 0{,}7580 - (1 - 0{,}9306) \approx 0{,}69$ Arvot $\Phi(0{,}70)$ ja $\Phi(1{,}48)$ saadaan taulukosta.

b) Määritetään pituus x, jonka alapuolella on 70 % tytöistä. Tulee olla $P(X \leqslant x) = 0{,}70$ eli

$$P(Z \leqslant \frac{x - 125{,}2}{6{,}9}) = \Phi(\frac{x - 125{,}2}{6{,}9}) = 0{,}70.$$



Taulukon* mukaan normitettu arvo, jolle pätee $\Phi(z) = 0{,}70$, on noin $z \approx 0{,}52$.

Siis

$$\frac{x - 125{,}2}{6{,}9} = 0{,}52 \qquad | \cdot 6{,}9$$

$$x - 125{,}2 = 0{,}52 \cdot 6{,}9$$

$$x = 125{,}2 + 0{,}52 \cdot 6{,}9 \approx 128{,}8.$$

Raja on 0,52 keskihajonnan verran keskiarvon yläpuolella.

Pituus, jonka alapuolella on 70 % ja siis yläpuolella 30 % tytöistä, on 128,8 cm.

Vastaus a) 0,69 b) vähintään 128,8 cm

Harjoituksia

628. Tieosuudella, jolla oli 90 km/h nopeusrajoitus, mitattujen nopeuksien keskiarvo oli 87,2 km/h ja keskihajonta 6,0 km/h. Nopeuksien jakauma oli likimain normaali. Kuinka monta prosenttia kuljettajista ajoi a) sallittua nopeutta b) hitaammin kuin 80 km/h? c) Millä nopeudella ajoivat kiireisimmät 10 % kuljettajista?

* Monilla laskimilla voidaan määrittää myös kertymäfunktion Φ käänteisfunktion arvoja.

TEHTÄVIÄ

629. Tavaraerässä on 2 % virheellisiä yksilöitä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetussa 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä yksilöä? (Ylioppilaskoe, s. 1993)

630. Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 4 korttia. Mikä on todennäköisyys, että a) kaikki ovat ässiä, b) mikään ei ole ässä? (Ylioppilaskoe, s. 1992)

631. Laatikosta, jossa on kolme punaista, neljä sinistä ja viisi mustaa palloa, otetaan umpimähkään kaksi palloa. Mikä on todennäköisyys, että ne ovat samanväriset? (Ylioppilaskoe, s. 1991)

632. Opetusryhmän kaikki 31 oppilasta ovat syntyneet vuonna 1992. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi heistä on syntynyt helmikuun 29. päivänä? Kuinka suuri ryhmän tulisi olla, jotta todennäköisyys olisi suurempi kuin 0,90?

633. Suomalaisista 52 % on naisia. Millä todennäköisyydellä arvalla valitussa kymmenen hengen suomalaisryhmässä on kumpaakin sukupuolta vähintään neljä?

634. Huoneessa on 4 naista ja 5 miestä. Huoneesta kutsutaan umpimähkään 4 henkilöä. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ilmaisee, kuinka monta kutsutuista on miehiä. Laske todennäköisyydet $P(\underline{x} = 0)$, $P(\underline{x} = 1)$, ... , $P(\underline{x} = 4)$ ja $\underline{x}$:n odotusarvo. (Ylioppilaskoe, k. 1980)

635. Jäljellä on 15 arpaa, joista kolmella saa 20 euron voiton ja yhdellä 100 euron voiton. Yksi arpa maksaa 10 euroa. Ostetaan kaksi arpaa. Laske nettovoiton odotusarvo.

636. a) Koneen valmistamista sulkapalloista 3,0 % on viallisia. Pallot pakataan kuuden pallon pakkauksiin. Kuinka monessa prosentissa pakkauksista kaikki pallot ovat virheettömiä?
b) Suuri erä koneen valmistamia tennispalloja pakattiin ilman laadunvalvontaa neljän pallon pakkauksiin. Myöhemmin havaittiin, että 12 %:ssa pakkauksista oli ainakin yksi viallinen pallo. Kuinka monta prosenttia palloista oli viallisia?

637. Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g? (Ylioppilaskoe, k. 2001)

638. Pussituskonetta säätämällä pussin keskisisältö voidaan valita väliltä 300 g ... 500 g. Mittausten mukaan sisällön massa on normaalisti jakautunut hajonnan ollessa 15 g. Miten suureksi pussin keskisisältö on säädettävä, kun vaaditaan, että pussin sisältö on 95 prosentin todennäköisyydellä yli 400 g?

639. Metrin pituinen sauva katkaistaan umpimähkään valitusta kohdasta, ja saadut osat valitaan suorakulmaisen kolmion kateeteiksi. Mikä on todennäköisyys sille, että tällöin hypotenuusan pituus on vähintään 80 cm? (Ylioppilaskoe, k. 1986)

640. Henkilöt A ja B käyvät päivittäin samassa kahvilassa. Kumpikin saapuu kahvilaan sattumanvaraiseen aikaan klo 9.00 ja klo 10.00 välillä ja viipyy siellä 15 minuuttia. Mikä on todennäköisyys sille, että he ovat kahvilassa tiettynä päivänä samalla hetkellä? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

641. Laitteen käynnistysosa muodostuu kolmesta eri komponentista, jotka laitetta käynnistettäessä särkyvät toisistaan riippumatta todennäköisyyksillä 0,0012, 0,0015 ja 0,0018. Millä todennäköisyydellä laite käynnistyy vähintään tuhat kertaa, jos laite on suunniteltu niin, että se a) käynnistyy vain silloin, kun kaikki kolme komponenttia ovat ehjiä b) käynnistyy, jos ainakin yksi komponenteista on ehjä?

642. Eräs tiedonsiirtojärjestelmä välittää nollista ja ykkösistä koostuvia seitsemän merkin pituisia ”sanoja”. Satunnaisten, toisistaan riippumattomien häiriöiden vuoksi 0 vääristyy 1:ksi todennäköisyydellä 0,005, kun taas 1 vääristyy 0:ksi todennäköisyydellä 0,010. Mikä on todennäköisyys, että lähetetty sana 0010111 saapuu vastaanottimeen siten, että enintään yksi merkki on virheellinen? (Ylioppilaskoe, k. 1990)

643. Kultaseppä aikoo ostaa 12 000 markalla joko yhden suuren jalokiven tai kaksi 6 000 mk arvoista pienempää ja hiottaa ostoksensa sitten uudestaan. Uudelleenhionta maksaa tuloksesta riippumatta suuren kiven osalta 1 000 mk ja pienemmän 800 mk sekä nostaa hionnan kestävän kiven arvoa 30 %. Todennäköisyys, että hiottava kivi tuhoutuu sisäisen vian vuoksi, on suurta kiveä käsiteltäessä 0,1 ja pienempää käsiteltäessä 0,08. Kannattaako kultasepän ostaa yksi suuri jalokivi vai kaksi pienempää? Tässä kannattavuuden mittana pidetään hionnan jälkeisen varallisuuden odotusarvoa.
(Ylioppilaskoe, k. 1996)

644. Henkilö lähtee töihin joka aamu autolla samaan aikaan. Hän saapuu työpaikkansa pysäköintialueelle ajankohtana, joka noudattaa normaalijakaumaa. Keskiarvo on klo 8.50 ja hajonta 5 min. Pysäköintialueelta löytyy paikka 65 %:n todennäköisyydellä, ja sieltä on viiden minuutin kävelymatka työpaikalle. Jos kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja, henkilö voi ajaa viidessä minuutissa toiselle alueelle, jolta aina löytyy pysäköintipaikka, mutta jolta on 10 minuutin kävelymatka työpaikalle. Mikä on todennäköisyys, että henkilö saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen? (Ylioppilaskoe, s. 1996)

645. Toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q valitaan satunnaisesti väliltä $[-1, 1]$. Mikä yhtälön juurten lukumäärän odotusarvo on?

646. a) Tavallisessa lottorivissä on seitsemän numeroa. On myös mahdollista pelata niin sanottuja lottojärjestelmiä merkitsemällä samaan ruudukkoon 8–11 numeroa. Kuinka monta erilaista seitsemän numeron lottoriviä sisältyy 11 numeron järjestelmään?
b) Lotossa arvotaan seitsemän varsinaisen lottonumeron lisäksi kolme lisänumeroa. Eräällä lottokierroksella voitonjako oli seuraava:

7 oikein	3 kpl	243 540,00 €
6 + 1 oikein	24 kpl	8 523,90 €
6 oikein	136 kpl	1 557,90 €
5 oikein	6 864 kpl	47,80 €
4 oikein	113 500 kpl	12,10 €.

Eräs päävoiton saaneista oli lotonnut 11 numeron järjestelmällä, jossa oli myös kaksi lisänumeroa oikein. Kuinka paljon rahaa hän päävoiton lisäksi sai muista voittoluokista?

647. Väestöntutkija havaitsi, että vuosina 1926–1930 kööpenhaminalaisten ensimmäisen avioliiton solmineiden naisten iän X jakauma on sellainen, että $\lg(X - 16)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona $0{,}875$ ja keskihajontana $0{,}130$. a) Kuinka monta prosenttia morsiamista oli tuolloin alle 20-vuotiaita?
b) Mikä iän mediaani oli?

648. Sekoitetusta korttipakasta nostetaan viisi korttia. Millä todennäköisyydellä saadaan
a) ainakin yksi hertta tai ainakin yksi ässä
b) ainakin yksi hertta ja ainakin yksi ässä?

649. Anna ja Maija pelaavat peliä, jonka lopputuloksen määrää sattuma niin, että pelin aloittaja voittaa todennäköisyydellä $0{,}8$. Sääntöjen mukaan pelin voittaja aloittaa seuraavan pelin. Anna aloittaa ensimmäisen pelin. Olkoon p_n todennäköisyys, että Anna voittaa n. pelin.
a) Kuvaile jono (p_n) ja laske, millä todennäköisyydellä Anna voittaa viidennen pelin.
b) Muodosta jonon (p_n) lauseke ja tutki, mitä lukua todennäköisyys p_n lähenee n:n kasvaessa.

Vastaukset

Luvut ja lukusuora

1. a) $-\frac{2}{9}$ $\left(-\frac{1}{3} : \frac{3}{2}\right)$ b) $-\frac{1}{5}$ $\left(\frac{6}{5} : (-6)\right)$

2. a) $\frac{14}{9}$ $\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9} + \frac{5}{3}\right)$

b) $-\frac{20}{9}$ $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{3}\right)$

3. a) $\frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$

b) $x = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{x} = -\frac{3}{10}\right)$

4. $\frac{5}{8}$ (Jos leivoksen alkuperäinen koko on a, niin Matin jälkeen jäljellä on $\frac{5}{6}a$ ja Tiinan jälkeen $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}a = \frac{5}{8}a$.)

5. Lasketaan joko lukujen tulo tai lavennetaan lauseke $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ lausekkeella $3+\sqrt{5}$.

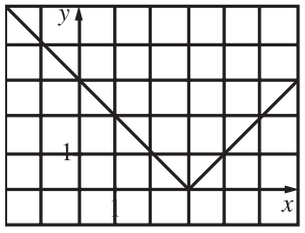
6. a) $x = 2$ tai $x = -8$ $(x+3=5$ tai $x+3=-5)$
b) $x < -8$ tai $x > 2$ $(x+3<-5$ tai $x+3>5)$
(Tulokset voi tarkistaa piirtämällä lukusuora ja tulkitsemalla lauseke $|x+3|$ luvun x etäisyydeksi luvusta -3. On löydettävä luvut, joiden etäisyys luvusta -3 on 5 (a-kohta) ja suurempi kuin 5 (b-kohta).)

7. $-2 \leqslant x \leqslant 3$ $(-5 \leqslant 2x-1 \leqslant 5)$

8. $x = -3$ tai $x = -\frac{1}{5}$
$(2x-1 = 3x+2$ tai $2x-1 = -3x-2)$

9. $x = -1$ (Kun $x < 0$, niin yhtälö on $-x = 2x+3$. Kun $x \geqslant 0$, yhtälö on $x = 2x+3$.)

10. a) $x \geqslant 3$ (Koska $|a| = a$, kun $a \geqslant 0$, niin tulee olla $x-3 \geqslant 0$.)
b) $x \leqslant 3$ (Koska $|a| = -a$, kun $a \leqslant 0$, niin tulee olla $x-3 \leqslant 0$.)



11. a) $x = 1$ (yhtälö $(4x-3)+(x-2)=0$ tai $4x-3=-(x-2)$)
b) $x = \frac{11+\sqrt{41}}{8}$ tai $x = \frac{11-\sqrt{41}}{8}$ (yhtälö $(4x-3)(x-2)=1$ tai yhtälö $\frac{1}{x-2} = 4x-3$)

12. Koska $x^4 + 2x^2 \geqslant 0$ kaikilla x, lausekkeet ovat määritellyt kaikilla x:n arvoilla.
$(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2})(x^2+1-\sqrt{x^4+2x^2})$
$= (x^2+1)^2 - (x^4+2x^2) = 1$ kaikilla x.

13. a) $x = -1$ tai $x = -4$
$(2x+5=3$ tai $2x+5=-3)$
b) $1 \leqslant x \leqslant 5$ $(-4 \leqslant 2x-6 \leqslant 4)$
c) $x < -3$ tai $x > -\frac{1}{3}$
$(3x+5 < -4$ tai $3x+5 > 4)$

14. Etäisyydet ovat $|x-3|$ ja $|x+5|$, luvut ovat $-\frac{23}{3} = -7\frac{2}{3}$ ja $-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}$.
(Luvut löydetään ratkaisemalla yhtälö $|x-3| = 4|x+5|$, joka toteutuu, kun $x-3 = 4(x+5)$ tai $x-3 = -4(x+5)$.)

15. $x = -\frac{5}{2}$ tai $x = \frac{3}{4}$ (Yhtälö saatetaan muotoon $|3x + 1| = |x - 4|$. Tämä yhtälö toteutuu, kun $3x + 1 = x - 4$ tai $3x + 1 = -(x - 4)$. Yhtälö, kuten yhtälöt yleensäkin, kannattaa tarkistaa graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta.)

16. $x = 0$ tai $x = 6$ tai $x = 4$ tai $x = -4$
($x^2 - 3x - 8 = 3x - 8$ tai $x^2 - 3x - 8 = -3x + 8$)

17. $x = \frac{7}{5}$ (Kun $x < 3$, yhtälö on
$-2x + 6 = 3x - 1$.
Kun $x \geqslant 3$, yhtälö on $2x - 6 = 3x - 1$.)

18. $-1 < a < 7$ (Epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{a-4}{3} < x < \frac{a+4}{3}$. Tulee olla
$\frac{a-4}{3} < 1 < \frac{a+4}{3}$ eli
$\frac{a-4}{3} < 1$ ja $\frac{a+4}{3} > 1$.)

19. $m = 354$ ja $n = 353$ tai $m = 54$ ja $n = 47$
(Tulee olla $(m + n)(m - n) = 707$.
Jaetaan luku 707 alkutekijöihin: $707 = 101 \cdot 7$.
Luvut m ja n saadaan ratkaisemalla yhtälöpari
$m + n = 707$, $m - n = 1$ ja yhtälöpari
$m + n = 101$, $m - n = 7$.)

20. Jokainen kokonaisluku k on joko muotoa $k = 2n$ (parillinen luku) tai $k = 2n + 1$ (pariton luku), missä n on kokonaisluku.
Jos $k = 2n$, niin
$k^3 + k = (2n)^3 + 2n = 8n^3 + 2n = 2(4n^3 + 1)$
ja siis parillinen.
Jos $k = 2n + 1$, niin
$k^3 + k = (2n + 1)^3 + 2n + 1$
$= 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2$
$= 2(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$
eli myöskin parillinen.

21. Olkoon a irrationaaliluku ja b rationaaliluku. Tällöin $b = \frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja. Jos tulo ab olisi rationaaliluku eli olisi $ab = \frac{p}{q}$, missä p ja q ovat kokonaislukuja, niin silloin olisi $a = \frac{p}{q} : b = \frac{p}{q} : \frac{m}{n} = \frac{pn}{mq}$, mikä on mahdotonta, koska a on irrationaaliluku.
Siis ab on irrationaaliluku.
Kahden eri suuren irrationaaliluvun tulo voi olla rationaaliluku, esimerkiksi $\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$.

22. Jos luku $\frac{3a-1}{a+2}$ olisi rationaaliluku, niin olisi $\frac{3a-1}{a+2} = \frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja. Kertomalla ristiin ja sieventämällä saadaan $(3n - m)a = 2m + n$. Jos olisi $3n - m = 0$, niin olisi $\frac{m}{n} = 3$ eli $\frac{3a-1}{a+2} = 3$ eli $3a - 1 = 3a + 6$, mikä on mahdotonta. Jos olisi $3n - m \neq 0$, niin olisi $a = \frac{2m+n}{3n-m}$ eli a olisi kahden kokonaisluvun osamäärä, mikä on mahdotonta, koska a on irrationaaliluku. Siis ei voi olla $\frac{3a-1}{a+2} = \frac{m}{n}$, joten $\frac{3a-1}{a+2}$ on irrationaaliluku.

23. 1° $(x \circ y) \circ z = (x + y - 2) \circ z$
$= (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4$ ja
$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2$
$= x + y + z - 4$. Siis $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

2° $x \circ y = x + y - 2 = y + x - 2 = y \circ x$.

3° Koska $x \circ \omega = x + \omega - 2$, niin $x \circ \omega = x$, kun $\omega = 2$. Tällöin kohdan 2° perusteella myös $\omega \circ x = x \circ \omega = x$.

4° $x \circ x^* = \omega$, kun $x + x^* - 2 = 2$ eli kun $x^* = 4 - x$. Tällöin kohdan 2° perusteella myös $x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$.

24. a) $f(0) = 1$ (Koska $f(0 + 0) = f(0)f(0)$, niin $f(0) = f(0)^2$. Yhtälö toteutuu, kun $f(0) = 0$ tai $f(0) = 1$. Jos olisi $f(0) = 0$, niin olisi $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$ kaikilla x, joten f olisi vakiofunktio. Siis $f(0) = 1$.)
b) Koska $f(x)f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 1$ kaikilla x, niin $f(x) \neq 0$.
c) On osoitettava, että funktio f saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.
Olkoon $a \neq b$. Koska $b - a \neq 0$, niin $f(b - a) \neq f(0)$ eli $f(b - a) \neq 1$. Tällöin $f(b) = f(a + (b - a)) = f(a)f(b - a) \neq f(a)$.
Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko. Jos $a = f(c)$ ja $b = f(d)$, niin $f(c + d) = f(c)f(d) = ab$. Siis ab kuluu käänteisfunktion määrittelyjoukkoon ja $f^{-1}(ab) = c + d = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.

Prosenttilaskenta

25. 2,25 % (Korko 4 781,30 euron talletuksesta oli 71,72 euroa, joten toisesta tilistä saatiin korkoa 348,74 € – 71,72 € = 277,02 €.)

26. 300 g suolaliuosta ja 450 g vettä (Olkoon x (g) suolaliuoksen määrä sekoituksessa. Tällöin $0{,}05x = 0{,}02 \cdot 750$, joten $x = 300$ (g).)

27. 8,6 % (Olkoon sekoitusosan suuruus a. Sekoituksen määrä on $7a$, ja sekoituksessa olevan suolan määrä $0{,}06 \cdot 4a + 0{,}12 \cdot 3a = 0{,}6a$.)

28. 13 % (Kuiva-aineen määrä on $0{,}55 \cdot 1\,300$ kg = 715 kg. Kuivatussa puussa on vettä 820 kg – 715 kg = 105 kg.
Vesipitoisuus on $\frac{105}{820} \approx 0{,}13 = 13$ %.)

29. 2 293,51 euroa ($0{,}74x = 1\,697{,}20$)

30. 12 % (Leenan palkkio on 125 euroa, joten Eeron palkkio on $\frac{15}{125} = 0{,}12 = 12$ % Leenan palkkiota suurempi.)

31. 17,4 % pienempi (Merkitään joulusesonkia edeltävää hintaa a. Joulusesongin hinta on $1{,}18a$ ja alennusmyyntihinta $0{,}70 \cdot 1{,}18a = 0{,}826a$.)

32. Suurenivat 12 %. (Jos kilohinta ennen oli a ja myynti b yksikköä, niin myynnistä saatavat tulot olivat ab. Hinnanalennuksen jälkeen kilohinta oli $0{,}7a$, myynti $1{,}6b$ ja myynnistä saatavat tulot $0{,}7a \cdot 1{,}6b = 1{,}12ab$.)

33. Hannu 262,80 euroa ja Maria 302,20 euroa (Jos x on Hannun palkkio, niin $x + 1{,}15x = 565$ eli $2{,}15x = 565$.)

34. 17 % (Jos välimatka ennen oli s ja keskinopeus v, niin matka-aika oli $\frac{s}{v}$. Välimatka on nyt $0{,}95s$ ja keskinopeus $1{,}15v$, joten matka-aika on $\frac{0{,}95s}{1{,}15v} \approx 0{,}83\frac{s}{v}$.)

35. 2,68 euroa (Veroton hinta x ratkaistaan yhtälöllä $1{,}06x = 47{,}30$.)

36. 73 km/h (Todellinen matka x ratkaistaan yhtälöstä $1{,}05x = 205$, josta $x \approx 195{,}24$ km. Koska 2 h 40 min ≈ 2,6667 h, keskinopeus oli $\frac{195{,}24}{2{,}6667} \approx 73$ (km/h).)

37. 2,9 % (Jos bruttopalkka on a, niin tammikuun nettopalkka on $0{,}69a$ ja helmikuun $0{,}71a$. Koska $\frac{0{,}71a}{0{,}69a} \approx 1{,}029$, nettopalkka nousi 2,9 %.)

38. 1,5 % (Olkoon a seuramatkan alkuperäinen hinta, jolloin polttoainekustannukset olivat $0{,}3 \cdot 0{,}5a = 0{,}15a$. Kokonaishinnan nousu oli $0{,}1 \cdot 0{,}15a = 0{,}015a$.)

39. 7,1 % (Olkoon tulojen suuruus a. Alkuperäiset hoitokulut olivat $0{,}32a$ ja nousseet $1{,}15 \cdot 0{,}32a = 0{,}368a$. Muuhun käyttöön riitti ennen $0{,}68a$ ja nyt $0{,}632a$.)

40. 38 % (Olkoon alkuperäisen tavoitteen suuruus a, jolloin alkuperäinen liikevoitto oli $0{,}82a$. Uuden liikevoiton tulee olla $1{,}08 \cdot 1{,}05a = 1{,}134a$.

Koska $\frac{1{,}134a}{0{,}82a} \approx 1{,}38$, liikevoiton tulee nousta 38 %.)

41. 27,5 % (Olkoon alkuperäinen myyty tavaramäärä a ja alkuperäinen hinta b. Muuttunut myyty tavaramäärä oli x ja muuttunut hinta $0{,}8b$. Yhtälöstä $x \cdot 0{,}8b = 1{,}02ab$ saadaan

$x = \frac{1{,}02}{0{,}8}a = 1{,}275a$.)

42. 6,7 % (Olkoon s matkan pituus ja v nopeus alkumatkalla. Tällä nopeudella matkaan kuluva aika olisi $\frac{s}{v}$. Matkaan kulunut todellinen aika on $\frac{0{,}6s}{v} + \frac{0{,}4s}{1{,}2v} \approx 0{,}933\frac{s}{v}$.)

43. 1 540 % (Olkoon 20-prosenttisen liuoksen määrä a. Liuoksessa on saippuaa $0{,}2a$ ja vettä $0{,}8a$. Jos x on laimennetun liuoksen määrä, niin $0{,}015x = 0{,}2a$ eli $x \approx 13{,}333a$. Veden määrä laimennetussa liuoksessa on $13{,}133a$.

Koska $\frac{13{,}133a}{0{,}8a} \approx 16{,}40$, vesimäärä kasvoi noin 1 540 %.)

44. 3 osaa 6-prosenttista ja 4 osaa 13-prosenttista liuosta (Olkoon a 6,0-prosenttisen liuoksen määrä ja b 13,0-prosenttisen liuoksen määrä. Suolan määrästä saadaan yhtälö

$0{,}06a + 0{,}13b = 0{,}10(a + b)$, josta $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.)

45. 36,8 % (Olkoon a vuoden 1996 liikevaihto ja x vuoden 1997 liikevaihto. Tutkimus- ja tuotekehittelymenot vuonna 1996 olivat $0{,}12a$ ja vuonna 1997 $1{,}14 \cdot 0{,}12a$. Yhtälöstä $0{,}10x = 1{,}14 \cdot 0{,}12a$ saadaan $x \approx 1{,}368a$.)

46. 98 % tukkuhintaa suuremmaksi, alentamattomalla hinnalla myyntikate on 63 % tukkuhinnasta. (Olkoon a tukkuhinta. Alentamaton hinta x ratkaistaan yhtälöllä $0{,}8x = 1{,}22 \cdot 1{,}3a$, josta $x = 1{,}9825a$. Siis hinta on 98 % tukkuhintaa suurempi. Kun hinta on $1{,}9825a$, yhtälöllä $1{,}22h = 1{,}9825a$ saadaan arvonlisäveroton hinta $h = 1{,}625a$. Siis alentamattoman hinnan myyntikate on $0{,}625a$.)

47. puoliympyrän 5,2 % suurempi (Jos puoliympyrän ja neliön piiri on p, niin puoliympyrän pinta-ala on $\frac{\pi p^2}{2(2+\pi)^2}$ ja neliön pinta-ala $\frac{p^2}{16}$.

Neliön pinta-alan suhde puoliympyrän pinta-alaan on $\frac{p^2}{16} : \frac{\pi p^2}{2(2+\pi)^2} = \frac{(2+\pi)^2}{8\pi} \approx 1{,}052$.)

48. 71 % (Olkoon kansantuote a, jolloin teollisuustuotanto on $0{,}2a$. Tarvittava teollisuustuotannon määrällinen nousu x ratkaistaan yhtälöstä $0{,}2a + x = 0{,}3(a + x)$, josta saadaan

$x = \frac{0{,}1}{0{,}7}a$. Tarvittava nousu prosentteina on

$\frac{0{,}1}{0{,}7}a : 0{,}2a \approx 0{,}71 = 71$ %.)

49. 73 % (Olkoon a koko myynnin arvo ja x ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo vuonna 2000. Yhtälöstä $1{,}1x + 0{,}95(a - x) = 1{,}06a$ saadaan $x \approx 0{,}73a$.)

50. 38 % (Olkoon a juuston paino, jolloin rasvan määrä on $0{,}28a$. Jos x on kuiva-aineen määrä, niin $0{,}45x = 0{,}28a$, joten $x \approx 0{,}62a$. Veden määrä on $a - 0{,}62a = 0{,}38a$.)

51. 93 % (Olkoon rypäleiden paino a, jolloin veden määrä rypäleissä on $0{,}82a$. Kuiva-aineen määrä $0{,}18a$ ei kuivattaessa muutu. Rusinoiden painosta x kuiva-aineen osuus on 76 %, eli $0{,}76x = 0{,}18a$. Siis $x \approx 0{,}237a$. Haihtuneen veden määrä on $a - x = 0{,}763a$.

Koska $\dfrac{0{,}763a}{0{,}82a} \approx 0{,}93 = 93\ \%$, vedestä haihtuu 93 %.)

52. 0,41 (Olkoon matkan pituus s (km). Tyynessä säässä edestakaiseen matkaan kuluva aika on $\dfrac{2s}{v}$.

Tuulen puhaltaessa matkaan kuluva aika on $\dfrac{s}{v+c} + \dfrac{s}{v-c}$.

Yhtälö $\dfrac{s}{v+c} + \dfrac{s}{v-c} = 1{,}2 \cdot \dfrac{2s}{v}$ jaetaan s:llä ja kerrotaan nimittäjien tulolla, jolloin saadaan $2v^2 = 2{,}4(v^2 - c^2)$ ja edelleen $c^2 = \dfrac{1}{6}v^2$.)

53. $p + q - \dfrac{pq}{100}$ prosenttia, vaihtaminen ei vaikuta kokonaisalennukseen.
(Olkoon alkuperäinen hinta a.

Hinta p %:n alennuksen jälkeen on $(1 - \dfrac{p}{100})a$ ja edelleen q %:n alennuksen jälkeen

$$(1 - \tfrac{q}{100})(1 - \tfrac{p}{100})a$$

$$= (1 - \frac{p+q}{100} + \frac{pq}{100 \cdot 100})a$$

$$= (1 - \frac{p + q - \frac{pq}{100}}{100})a.$$

Siis kokonaisalennus oli $p + q - \dfrac{pq}{100}$ prosenttia. Koska

$$(1 - \tfrac{p}{100})(1 - \tfrac{q}{100})a = (1 - \tfrac{q}{100})(1 - \tfrac{p}{100})a,$$

vaihtaminen ei vaikuta kokonaisalennukseen.)

Potenssit ja juuret

54. 27 cm $(0{,}8^{10} \cdot 2{,}5\ \text{m})$

55. a) $-\dfrac{22}{49}$ $(-\dfrac{1}{7^2} - 3 \cdot \dfrac{1}{7})$

b) $\dfrac{65}{36}$ $(-\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2 - 3\left(-\dfrac{5}{6}\right))$

56. a) $-\dfrac{1}{36a}$ b) $\dfrac{x^n}{2}$ $(\dfrac{x^{2n}}{2x^n} = \dfrac{x^{2n-n}}{2})$

c) x^4 $((x^{n-2})^{n-2} \cdot (x^n)^{4-n}$
$= x^{(n-2)^2} \cdot x^{n(4-n)} = x^{(n-2)^2 + n(4-n)})$

57. a) $\dfrac{1}{64}$ $(\dfrac{2^{x-1} \cdot 8^{x+1}}{4^{2x+4}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot 2^{3(x+1)}}{2^{2(2x+4)}}$
$= \dfrac{2^{(x-1)+3(x+1)}}{2^{2(2x+4)}} = \dfrac{2^{4x+2}}{2^{2(2x+4)}} = 2^{4x+2-2(2x+4)})$

b) 3^n $(3^{n+2} - 3^{n+1} - 5 \cdot 3^n$
$= 3^2 \cdot 3^n - 3 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^n = (9 - 3 - 5)3^n)$

58. a) $9{,}94 \cdot 10^{1378}$ $(8{,}91^{20} \cdot 10^{68 \cdot 20})$

b) $2{,}54 \cdot 10^{-24}$

$(\dfrac{7{,}36^{24} \cdot 10^{1320}}{9{,}12^{15} \cdot 10^{1350}} \approx 2{,}54 \cdot 10^6 \cdot 10^{-30})$

59. a) $]-\infty, 3]$ b) $\mathbb{R}$

60. a) $x = \sqrt[6]{20} \approx 1{,}65$ tai $x = -\sqrt[6]{20} \approx -1{,}65$

b) $x = \sqrt[5]{30} \approx 1{,}97$

61. a) $x = \dfrac{2}{3}$ tai $x = -\dfrac{2}{3}$

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

62. a) $-7 < x < 7$ (Ratkaisuväli päätellään funktion x^4 kuvaajasta.)

b) $x < 6$ (Ratkaisuväli päätellään funktion x^5 kuvaajasta.)

63. 4,7 % (Olkoon budjetin nykyinen suuruus a. Budjetti tulee joka vuosi k-kertaiseksi. Yhtälö $k^6 a = 0{,}75a$ toteutuu, kun $k = \sqrt[6]{0{,}75} \approx 0{,}953$.)

64. 10 % (Jos a on alkuperäinen särmän pituus ja b uusi särmän pituus, niin $\frac{b^3}{a^3} = 1{,}331$. Siis $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{1{,}331} = 1{,}1$.)

65. a) $a^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{-\frac{1}{2}}$ c) $a^{\frac{5}{2}}$

66. a) $\sqrt{3}$ $((3^2)^{\frac{1}{4}})$

b) $\sqrt{5}$ $(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}})$

c) $\sqrt[3]{5}$ $(\frac{5^1}{(5^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^1}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{1-\frac{2}{3}})$

67. a) $a - a^2$ (Potenssikaavoilla:
$\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5}) = a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{3}{3}} - a^{\frac{6}{3}}$.
Käyttäen juurten ominaisuuksia:
$\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5}) = \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^5}$
$= \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a^6}$.)

b) $\sqrt{a}$ $(\left(\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{2-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}})$

68. a) $x \approx 4{,}23$ $(x = 2{,}17^{\frac{1}{0{,}537}})$

b) $x \approx 0{,}724$ $(x = 3{,}85^{-\frac{1}{4{,}18}})$

69. a) $\frac{1}{7}$

b) $7\sqrt{5}$ $(\sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5})$

c) $5\sqrt{5}$ $(\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5})$

70. $\sqrt{50} - \sqrt{8} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ja
$\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

71. $32\sqrt{5} + 30$ $((2\sqrt{5})^3 - 3(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{5} + 90$
$= 8 \cdot 5\sqrt{5} - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 8\sqrt{5} + 90)$

72. a) 5 $(|x+1| + |x-4| = x + 1 + (-x + 4))$
b) $-2x + 3$ $(|x+1| + |x-4| = -x - 1 + (-x + 4))$

73. a) $2{,}67 \cdot 10^{999}$ $(\sqrt{7{,}15} \cdot \sqrt{10^{1998}})$
b) $9{,}49 \cdot 10^{1000}$ $(\sqrt{90{,}0} \cdot \sqrt{10^{2000}})$

74. 22 m (Voidaan suoraan ratkaista verrantoyhtälö $\frac{s}{60} = \frac{60^2}{100^2}$. Voidaan myös ensin ilmaista jarrutusmatka s (m) nopeuden v (km/h) lausekkeena $s = kv^2$. Verrannollisuuskerroin $k = 0{,}006$ saadaan yhtälöstä $60 = k \cdot 100^2$. Siis kysytty matka on $s = 0{,}006 \cdot 60^2$ (m).)

75. a) $y = \frac{18}{x^2}$ ($y = \frac{k}{x^2}$, missä k on verrannollisuuskerroin. Koska $32 = \frac{k}{0{,}75^2}$, niin $k = 18$.)

b) 1,5 neutronia sekunnissa ($y = \frac{18}{3{,}5^2}$; toinen tapa on ratkaista verrantoyhtälö $\frac{y}{32} = \frac{0{,}75^2}{3{,}5^2}$.)

76. a) $y = 4\sqrt{x}$ ($y = k\sqrt{x}$, verrannollisuuskerroin k ratkaistaan yhtälöstä $12 = k \cdot \sqrt{9}$.)

b) $y = \frac{36}{\sqrt{x}}$ ($y = \frac{k}{\sqrt{x}}$, verrannollisuuskerroin k ratkaistaan yhtälöstä $12 = \frac{k}{\sqrt{9}}$.)

77. a) $f'(x) = 3x^5 + \frac{8}{x^3}$

b) $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$

78. $\sqrt[6]{2}$ ja $-\sqrt[6]{2}$ $(f'(x) = 2x - \frac{4}{x^5} = \frac{2x^6 - 4}{x^5} = 0$, kun $x^6 = 2$.)

79. 2,8 % ($k^8 \cdot 12\,000 = 15\,000$, $k = \sqrt[8]{\frac{15\,000}{12\,000}} \approx 1{,}028$)

80. $p = 26{,}0$ (Olkoon tuotteen alkuperäinen hinta a. Jos $k^3 a = 2a$, niin $k = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$. Siis korotusprosentti p on 26,0.)

81. yli 4,78 km:n korkeudella (Jos d on sellainen etäisyys maapallon keskipisteestä, että paino on 80,00 kg, niin $\dfrac{80{,}00}{80{,}12} = \dfrac{6370^2}{d^2}$, josta $d \approx 6374{,}78$.)

82. 1 024 $(2^x \cdot 8^y = 2^x \cdot 2^{3y} = 2^{x+3y})$

83. $\sqrt{3}$ $\left(a = 3^{\frac{1}{6}} \text{ ja } 2\sqrt[4]{3}\, a^{\frac{3}{2}} - a^3\right.$

$= 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}}$

$\left. = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \right)$

84. a) $x = 2 - \sqrt{3}$ tai $x = 2 + \sqrt{3}$

$(x - 2 = \sqrt[4]{9}$ tai $x - 2 = -\sqrt[4]{9})$

b) $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

$(-\sqrt[4]{9} < x - 2 < \sqrt[4]{9})$

c) $x = 2 + \sqrt[3]{5}$ $(x - 2 = \sqrt[3]{5})$

d) $x < 2 + \sqrt[3]{5}$ $(x - 2 < \sqrt[3]{5})$

85. $x = \dfrac{9}{4}$ (Kun $1 \leqslant x \leqslant 3$, niin

$\sqrt{x(x-3)^2} + \sqrt{x(x-1)^2}$

$= |x - 3|\sqrt{x} + |x - 1|\sqrt{x}$

$= (-x + 3)\sqrt{x} + (x - 1)\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$.

Siis yhtälö on $2\sqrt{x} = 3$.)

86. enintään 3.50,09 (B:n pistemäärä on 1 041. A:n on saatava vähintään 1 028 pistettä. P on T:n vähenevä funktio, joten $P \geqslant 1\,028$, kun $T \leqslant 480{,}00 - \left(\dfrac{1028}{0{,}03768}\right)^{\frac{1}{1{,}85}} \approx 230{,}0954$.)

87. Osoitetaan, että $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

Koska $(3\sqrt{2})^2 = 18$ ja $(2\sqrt{3})^2 = 12$, niin $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ ja siis $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} > 0$.

Edelleen on $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

$= 18 - 12\sqrt{2}\sqrt{3} + 12 = 30 - 12\sqrt{6}$.

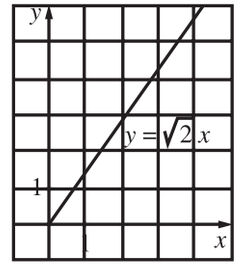
Siis $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

88. $f(x) = \sqrt{(x\sqrt{2 + \sqrt{x}})^2 - (x\sqrt[4]{x})^2}$

$= \sqrt{x^2(2 + \sqrt{x}) - x^2\sqrt{x}} = \sqrt{2x^2}$

$= \sqrt{2}\,|x| = \sqrt{2}\,x$, sillä $x \geqslant 0$.

Siis f on lineaarinen funktio (kuvaaja puolisuora).



(Merkintä $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tarkoittaa, että funktion f määrittelyjoukko on väli $[0, \infty[$.)

89. luku x (Molemmat luvut ovat positiivisia, joten niiden suuruusjärjestys on sama kuin kuudensien potenssien $x^6 = (1 + \sqrt[6]{10^{-1001}})^2$

$= 1 + 2\sqrt[6]{10^{-1001}} + \sqrt[3]{10^{-1001}}$ ja

$y^6 = 1 + \sqrt[3]{10^{-1001}}$ suuruusjärjestys.)

90. $(3\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ja $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ (Murtopotenssi $x^{\frac{1}{y}}$ on määritelty, kun $x > 0$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = 27^y = (3^3)^y = 3^{3y}$. Sijoitetaan toiseen yhtälöön:

$\left(\dfrac{(3^{3y})^2}{3}\right)^y = 3$ eli $3^{(6y-1)y} = 3^1$.

Siis $(6y - 1)y = 1$, josta saadaan

$y = \dfrac{1}{2}$ tai $y = -\dfrac{1}{3}$.)

91. 14,6 % suurempi (Jos lankun leveys on a, paksuus b ja pituus c, niin lankun kantokyky on $\frac{kab^2}{c}$, missä k on verrannollisuuskerroin.

Koska $\frac{k \cdot 1{,}3a \cdot (1{,}15b)^2}{1{,}5c} \approx 1{,}146\frac{kab^2}{c}$, suuremman lankun kantokyky on 14,6 % pienemmän kantokykyä suurempi.)

92. 7-järjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 ovat kymmenjärjestelmässä 8, 57 ja 400.
$(1 \cdot 7^1 + 1,\ 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1$ ja
$1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1)$
Kymmenjärjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 ovat 7-järjestelmässä 14, 216 ja 3145.
$(11 = 1 \cdot 7^1 + 4,$
$111 = 2 \cdot 49 + 7 + 6 = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 6$ ja
$1111 = 3 \cdot 343 + 49 + 4 \cdot 7 + 5$
$= 3 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 5)$

93. $(20\sqrt{100+p} - 200)$ % (Olkoon pääoman suuruus a. Jos p %:n korko lisätään vuosittain, niin pääoma vuoden kuluttua on $(1 + \frac{p}{100})a$.

Jos x prosentin korko lisätään pääomaan puolivuosittain, niin pääoma vuoden kuluttua on $\left(1 + \frac{x}{200}\right)^2 a$.

Yhtälö $\left(1 + \frac{x}{200}\right)^2 = 1 + \frac{p}{100}$ toteutuu, kun

$1 + \frac{x}{200} = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}$ tai

$1 + \frac{x}{200} = -\sqrt{1 + \frac{p}{100}}$.

Ensimmäisestä vaihtoehdosta saadaan

$x = 200(\sqrt{1 + \frac{p}{100}} - 1)$

$= 200(\sqrt{\frac{100+p}{100}} - 1) = 200(\frac{\sqrt{100+p}}{10} - 1)$

$= 20\sqrt{100+p} - 200.)$

Polynomit, polynomiyhtälöt ja -epäyhtälöt

94. a) $-4x + 1$ b) 8 c) $-x^2 + 7x - 9$

95. a) $9a^6 + 3a^3 + \frac{1}{4}$

b) $x^2 - 10x + 25$ (Voidaan laskea muodossa $(5 - x)^2$, tai, koska $-x + 5 = -(x - 5)$, niin $(-x + 5)^2 = (x - 5)^2$. Voidaan myös laskea tulona $(-x + 5)(-x + 5)$.)

c) $t^2 + 6t + 9$ (Koska $-t - 3 = -(t + 3)$, niin $(-t - 3)^2 = (t + 3)^2$.)

d) $9 - s^2$

96. a) $-2x^2 + 9x - 8$ b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

97. a) $10(x + 3)(x - 3)$ b) $x(x + 5)^2$

98. a) $x = 2$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 12, saadaan yhtälö $4x + 6 = 9x - 4$.)

b) $x = -\frac{1}{3}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 6, saadaan yhtälö $3(x^2 - x) - (3x^2 - 1) = -6x$.)

99. a) $x < 0$ b) $x \geqslant \frac{9}{5}$

100. $x < \frac{6}{7}$ (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 4, saadaan epäyhtälö $8x - (x + 4) < 2$.)

101. 138 km (yhtälö esimerkiksi $\frac{x}{2{,}5} = \frac{x}{2{,}75} + 5$)

102. a) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = \frac{5}{3}$

b) $x = -2 + \sqrt{7}$ tai $x = -2 - \sqrt{7}$
(Kun yhtälö kerrotaan luvulla 12, saadaan yhtälö $x^2 + 4x - 3 = 0$.)

103. $x = 3\sqrt{2}$ tai $x = -3\sqrt{2}$ tai $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{5}$

$(3x^2 + x - 6 = 2x^2 + x + 6$ tai
$3x^2 + x - 6 = -(2x^2 + x + 6))$

104. $q \leqslant \frac{16}{3}$ (Yhtälön diskriminantin $64 - 12q$ tulee olla epänegatiivinen.)

105. a) $x < -2\sqrt{3}$ tai $x > 2\sqrt{3}$
b) $-1 \leqslant x \leqslant 0$

106. 3, 4 ja 5 (Merkitään lukuja n, $n+1$ ja $n+2$. Suurin luku $n+2$ on hypotenuusan pituus, joten tulee olla $n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$. Yhtälö toteutuu, kun $n = -1$ tai $n = 3$. Luku -1 ei ole luonnollinen luku.)

107. $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 2$ tai $x = 3$
($x^2 - 3x + 1 = 1$ tai $x^2 - 3x + 1 = -1$)

108. a) $(x-7)(x+5)$
b) $12(x - \frac{2}{3})(x + \frac{3}{4}) = (3x-2)(4x+3)$

109. a) $x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = 5$
($x(x^2 - 7x + 10) = 0$)
b) $x < 0$ tai $2 < x < 5$
(Lasketaan funktion $x^3 - 7x^2 + 10x$ arvot esimerkiksi kohdissa -1, 1, 3 ja 6.)

110. a) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -1$
(tulon nollasääntö)
b) $x = 0$ tai $x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ tai $x = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$
($-4x^3 - 4x^2 + x = 0$)

111. $x = \frac{1}{3}$ tai $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 1$
($(3x-1)(3x^2 - 2x - 1) = 0$)

112. $-4 \leqslant x \leqslant 0$ tai $x \geqslant 4$ (Funktion $x^3 - 16x$ nollakohdat ovat -4, 0 ja 4. Selvitetään merkit laskemalla funktion arvot esimerkiksi kohdissa -5, -1, 1 ja 5.)

113. $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$

114. a) esimerkiksi $(x+3)(x+1)(x-2) = 0$
(Tai mikä tahansa yhtälö muotoa $a(x+3)(x+1)(x-2) = 0$, missä $a \neq 0$.)
b) $P(x) = 9(x+3)(x+1)(x-2)$
(Määritetään sellainen a:n arvo, että funktiolle $P(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)$ on $P(1) = -72$.)

115. $x = -2$ (Yhtälö saatetaan muotoon $\sqrt{x+6} = -x$. Neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.)

116. $x = -4$ (Yhtälö toteutuu, kun $\sqrt{1-2x} + 1 = 4$ tai $\sqrt{1-2x} + 1 = -4$ eli kun $\sqrt{1-2x} = 3$ tai $\sqrt{1-2x} = -5$.)

117. $-\frac{3}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}$ (Epäyhtälö on määritelty, kun $1 - 2x \geqslant 0$ eli kun $x \leqslant \frac{1}{2}$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten se on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun epäyhtälön $1 - 2x < 4$ kanssa.)

118. $x = -2$ tai $x = \frac{2}{3}$
(Derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$.)

119. $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$ tai $x = 0$ tai $x = \sqrt{6}$ tai $x = -\sqrt{6}$
($f'(x) = 5(3x^2 - 6)(x^3 - 6x)^4$)

120. a) $\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$
b) $-\frac{10}{(5x-1)^3}$ ($\frac{1}{(5x-1)^2} = (5x-1)^{-2}$)

121. $x = \frac{49}{9}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 2, saadaan yhtälö $6 - (\sqrt{x} - 1) = 2\sqrt{x}$, josta $\sqrt{x} = \frac{7}{3}$.)

122. $x = \frac{4\pi - 1}{\pi + 1}$ (yhtälö $\frac{(\pi+1)x + 2\pi + 1}{3} = 2\pi$)

123. $x = \frac{3}{4}$ (Yhtälön $4\sqrt{1-x} = 4x - 1$ neliöönkorotusehto on $x \geqslant \frac{1}{4}$.)

124. -1 (Välillä $x \geqslant 5$ yhtälö on $x(x-5) = -6$. Toisen asteen yhtälön juuret ovat 3 ja 2. Kumpikaan juuri ei ole välillä $x \geqslant 5$. Välillä $x < 5$ yhtälö on $x(-x+5) = -6$. Toisen asteen yhtälön juuret ovat 6 ja -1. Välillä $x < 5$ on juuri -1.)

125. $x \leqslant \frac{1}{2}$ tai $x \geqslant \frac{3}{4}$ (Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(3x-2)^2 \geqslant (-x+1)^2$ kanssa.)

126. $x = 1$ tai $x = -4$ tai $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{2}$
(Yhtälö toteutuu, kun $x^3 - 3x + 2 = x^3 + x^2 - 2$ tai $x^3 - 3x + 2 = -(x^3 + x^2 - 2)$.)

127. a) $x = 1$ tai $x = -1$ tai $x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$
(Jos merkitään $x^2 = t$, niin $t^2 - 4t + 3 = 0$.)
b) $x = 1$ tai $x = \sqrt[3]{3}$ (Merkitään $x^3 = t$.)

128. $x > -20 - 20a$, $a = -\frac{5}{4}$ (Epäyhtälön ratkaisujoukko on väli $]-20-20a, \infty[$. Ratkaisujoukko on väli $]5, \infty[$, kun $-20 - 20a = 5$.)

129. $x < -2$ tai $\frac{1}{3} < x < 2$
(Tulee olla $(3x+1)(x^2-4) - 2(x^2-4) < 0$ eli $(3x-1)(x^2-4) < 0$. Funktion $(3x-1)(x^2-4)$ nollakohdat ovat -2, $\frac{1}{3}$ ja 2. Merkit selvitetään laskemalla arvot esimerkiksi kohdissa -3, 0, 1 ja 3.)

130. $0 < k < 4$ (Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktion kaikki arvot ovat positiivisia, kun funktiolla ei ole nollakohtia. Siis yhtälön $x^2 + kx + k = 0$ diskriminantin $k^2 - 4k$ tulee olla negatiivinen.)

131. Tutkitaan erotusta.
a) $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$, joten $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.
b) $(a + \frac{1}{a})^2 - 4 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 4$
$= a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 \geqslant 0$

132. Toinen juuri kasvaa kahdella, toinen ei muutu.
(Yhtälö $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ toteutuu, kun $x = \frac{2a \pm 2(a-1)}{2}$ eli kun
$x = 2a - 1$ tai $x = 1$.
Kun a:n paikalle sijoitetaan $a + 1$, juuresta $2a - 1$ tulee $2a + 1$ eli juuri kasvaa kahdella. Toinen juuri 1 ei riipu a:sta.
Voidaan myös sijoittaa $a + 1$ a:n paikalle alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaista näin saatava yhtälö $x^2 - (2a+2)x + 2a + 1 = 0$.)

133. $a = 7$ tai $a = -1$. Kun $a = 7$, juuri on $x = 3$. Kun $a = -1$, juuri on $x = -1$.
(Yhtälön diskriminantin $(1-a)^2 - 4(a+2)$ tulee olla 0.)

134. Yhtälön diskriminantti on $(a-b)^2 + 4$ ja siis aina positiivinen.

135. arvoja välillä 3,6 m – 8,4 m
(Olkoot suorakulmion sivujen pituudet x ja y (m). Tällöin $xy = 30$ eli $y = \frac{30}{x}$.
Koska $2x + 2y \leqslant 24$, niin $x + \frac{30}{x} \leqslant 12$.
Koska $x > 0$, niin kertomalla x:llä saadaan epäyhtälö $x^2 + 30 \leqslant 12x$. Epäyhtälö toteutuu, kun $6 - \sqrt{6} \leqslant x \leqslant 6 + \sqrt{6}$.
Symmetrian vuoksi y:n vaihteluväli on sama.)

136. 6,25 % ja 8,25 % (Voidaan ratkaista p toisen asteen yhtälöstä
$(1 + \frac{p+2}{100})(1 + \frac{p}{100}) \cdot 10\,000 = 11\,501{,}60$.
Voidaan myös ratkaista korkokerroin k yhtälöstä $k(k + 0{,}02) \cdot 10\,000 = 11\,501{,}60$.)

137. Epäyhtälö $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leqslant 2$ on yhtäpitävä epäyhtälön $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ kanssa.
Jälkimmäinen epäyhtälö on tosi, koska
$2(a^2+b^2) - (a+b)^2$
$= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0.$

138. Epäyhtälö $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ on yhtäpitävä epäyhtälön $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ kanssa.
Koska $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0,$
niin $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.
Koska epäyhtälön $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$
molemmat puolet ovat epänegatiiviset, niin voidaan myös todistaa neliöön korottamalla saatu yhtäpitävä epäyhtälö $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

139. $a^2 + \frac{1}{2}b^2$
$(a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2$
$= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}b^2 \geqslant \frac{1}{4}b^2 > 0)$

140. $((x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$, joten
jos $x + y + z = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, niin
$0 = 1 + 2(xy + yz + zx)$.)

141. Koska $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, niin
$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$
$= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geqslant 0.$
Yhtäsuuruus pätee, kun $a = b = c$.

142. $f(x) = x + 1$ (Koska $f(1)f(1) - f(1) = 2$, niin $f(1) = -1$ tai $f(1) = 2$. Jos $f(1) = -1$, niin ehdosta $f(x)f(1) - f(x) = x + 1$ saadaan
$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)$, ja jos $f(1) = 2$, saadaan
$f(x) = x + 1$. Osoittautuu, että vain jälkimmäisellä funktiolla on ominaisuus
$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.)

143. 7 ja 10 $(a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$= 1^2 - 2 \cdot (-3) = 7$. Edelleen on
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, joten
$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.
Voidaan myös ratkaista a ja b yhtälöparista $a + b = 1$ ja $ab = -3$ ja sijoittaa lausekkeisiin $a^2 + b^2$ ja $a^3 + b^3$.)

Rationaalifunktiot

144. a) $\mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, eli määrittelyehto $x \neq 0$ ja $x \neq -2$
b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, eli määrittelyehto $x \neq 2$ ja $x \neq -2$
c) $\mathbb{R}$, eli määritelty kaikilla x:n arvoilla ($x^2 + 4 > 0$ kaikilla x)
d) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, eli määrittelyehto $x \neq -4$

145. a) $\frac{2}{2x+1}$ b) $\frac{3x}{6x+1}$
c) $-\frac{1}{5}$ $(\frac{x-2}{10-5x} = \frac{x-2}{5(2-x)})$
(Supistuksen voi tarkistaa piirtämällä alkuperäisen ja supistetun lausekkeen kuvaajat samaan graafisen laskimen näyttöön. Kuvaajien tulee olla samat.)

146. a) $\frac{x}{x-1}$ $(\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)})$
b) $-\frac{x}{x+1}$ $(\frac{x(1-x)}{(x+1)(x-1)})$
c) $-\frac{1-x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ $(\frac{(1-x)(1-x)}{(x+1)(x-1)})$
d) Ei supistu.

147. a) $\frac{4}{3}$
$(\frac{4x - 15x^2}{3x + 5x^2} = \frac{4 - 15x}{3 + 5x} \to \frac{4}{3}$, kun $x \to 0.)$
b) Ei raja-arvoa. (Kohta $x = 3$ on nimittäjän nollakohta, mutta ei osoittajan nollakohta, eli lauseke ei ole kohdassa 3 ”muotoa $\frac{0}{0}$”.)

148. $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{9x^2-1}{12x-4} = \frac{(3x+1)(3x-1)}{4(3x-1)}\right)$

149. a) $\frac{x^2+x+6}{x(x+3)}$

b) $\frac{2x-1}{2x+6}$ (Vähenevä lavennetaan 2:lla.)

150. a) $-\frac{2}{x+1}$

(Vähenevä lavennetaan $(x+1)$:llä. Saadaan $-\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{-(x+1)-(x-1)}{x(x+1)}$.)

b) $\frac{-x+4}{x(x+1)(x-1)}$ (Vähenevä lavennetaan x:llä ja vähentäjä $(x-1)$:llä.)

151. a) $-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$ $\left(\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x}{(1-x)^2}\right)$

b) $-\frac{1+x}{x}$ $\left(\left(\frac{1}{x} - x\right) : (x-1)\right.$

$\left. = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)}{x} \cdot \frac{1}{x-1}\right)$

152. $\frac{1}{x+1}$ $\left(\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) : \left(\frac{x}{1-\sqrt{x}} + \frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)\right.$

$\left. = \frac{2x}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{2x}\right)$

153. -2 $\left(\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) : (x-1) = \frac{1-x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x-1}\right)$

154. $\frac{x-1}{x+1}$

$\left(\frac{x^2+1-2x}{x} : \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{x}{x^2-1}\right)$

155. a) $x = -3$ (Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 3$. Osoittajan nollakohdat ovat 3 ja -3.)
b) $x = -3$ (Yhtälö on määritelty kaikkialla. Osoittaja on nolla, kun $x + 3 = 0$.)

156. $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ tai $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

(Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq -3$. Kun yhtälö kerrotaan tulolla $x(x+3)$, saadaan yhtälö $x + 3 - x^2 = 0$.)

157. $x = \frac{4}{3}$ (Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 1$ ja $x \neq -1$. Kun yhtälö kerrotaan lausekkeella $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, saadaan yhtälö $x - 1 + 2 = 3(x^2 - 1)$.)

158. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Kun yhtälö kerrotaan $4x^2$:lla, saadaan yhtälö $2x - (1 + 2x) = -4x^4$.)

159. a) $x \geqslant 3$ (Epäyhtälö on määritelty, kun $x \neq 0$. Koska koko määrittelyjoukossa on $x^2 > 0$, epäyhtälö voidaan kertoa x^2:lla.)
b) $x < 1$ tai $x > 4$ (Koska $x^2 + 4 > 0$ kaikilla x, epäyhtälö voidaan kertoa $(x^2 + 4)$:lla. Saadaan epäyhtälö $-x^2 + 5x - 4 < 0$, joka ratkaistaan määrittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaajaparaabeli.)

160. $x < 0$ tai $x > 3$ (Funktion $\frac{x-3}{x}$ nollakohta on 3 ja funktio ei ole määritelty kohdassa 0. Lasketaan funktion arvot esimerkiksi kohdissa -1, 1 ja 4.)

161. $-1 < x < 2$ (Funktion $\frac{3}{x+1} - 1 = \frac{2-x}{x+1}$ nollakohta on 2 ja funktio ei ole määritelty kohdassa -1. Lasketaan funktion arvot esimerkiksi kohdissa -2, 0 ja 3.)

162. $x < -2$ tai $x \geqslant 3$ (Epäyhtälö saatetaan muotoon $\frac{6-2x}{x+2} \leqslant 0$. Funktion $\frac{6-2x}{x+2}$ nollakohta on $x = 3$ ja funktio ei ole määritelty kohdassa $x = -2$. Lasketaan funktion arvo esimerkiksi kohdissa -3, 0 ja 4. Ratkaisujoukkoon sisältyy myös nollakohta $x = 3$.)

163. $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$; nollakohdat -3 ja 1;
$f'(x) > 0$, kun $-3 < x < 1$
(Koska $x^2 + 3 > 0$ kaikilla x, niin funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$. Koska derivaattafunktion nimittäjä on aina positiivinen, derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $-x^2 - 2x + 3$.)

164. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$, nollakohdat 1 ja $-\dfrac{1}{3}$
(Kun yhtälö $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{(x+1)^2} = 0$ kerrotaan lausekkeella $x^2(x+1)^2$, saadaan yhtälö $-(x+1)^2 + 4x^2 = 0$.)

165. $x = \pi - 1$ tai $x = -\pi - 1$ (Yhtälö on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla. Yhtälö toteutuu, kun $(x+1)^2 - \pi^2 = 0$ eli kun $(x+1)^2 = \pi^2$ eli kun $x + 1 = \pi$ tai $x + 1 = -\pi$.
Yhtälössä $(x+1)^2 - \pi^2 = 0$ voidaan myös korottaa neliöön ja ratkaista yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.)

166. $x = \dfrac{1}{2}$ (Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 1$. Kun yhtälö kerrotaan $x(1-x)$:llä, saadaan yhtälö $1 - (1 - x) = 2(x - x^2)$.)

167. a) $1 - x$ $\left(\left(\dfrac{1}{x} - x\right) : \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \dfrac{1 - x^2}{x} : \dfrac{1 + x}{x}\right.$
$\left. = \dfrac{1 - x^2}{x} \cdot \dfrac{x}{1 + x}\right)$

b) x $\left((x - 1) : \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = (x - 1) : \dfrac{x - 1}{x}\right.$
$\left. = (x - 1) \cdot \dfrac{x}{x - 1}\right)$

c) $x = \dfrac{1}{2}$ (Yhtälö on $1 - x = x$.

a-kohdan lauseke on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.
b-kohdan lauseke on määritelty, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$.)

168. 48 km/h (Olkoon koko matkan pituus s (km). Yhtälö on esimerkiksi
$\dfrac{\frac{1}{2}s}{80} + \dfrac{\frac{1}{2}s}{v} = \dfrac{s}{60}$ eli $\dfrac{1}{160} + \dfrac{1}{2v} = \dfrac{1}{60}$.)

169. Koska n on pariton, niin $n = 2k + 1$, missä k on kokonaisluku. Siis
$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} = \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2 + 3} = \frac{4(k^2 + k)}{4(k^2 + k + 1)}.$$

170. 32 osallistujaa, kukin maksoi 45 euroa (Jos x on lopullinen osallistujamäärä, niin $\dfrac{1\,440}{x} = \dfrac{1\,440}{x+4} + 5$. Kun yhtälö kerrotaan tulolla $x(x+4)$, saadaan yhtälö $1440(x+4) = 1440x + 5x(x+4)$.)

171. -1 ja 0 sekä 2 ja 3 (Yhtälö $f(x) = f(x+1)$ tulee muotoon $x + 1 + \dfrac{2}{x-1} = x + 2 + \dfrac{2}{x}$ ja edelleen muotoon $\dfrac{2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x}$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 1$.)

172. 2,6 m/s (Jos virtausnopeus on v (km/h), niin $\dfrac{75}{25+v} + \dfrac{75}{25-v} = 7$. Kun yhtälö kerrotaan tulolla $(25+v)(25-v)$, saadaan yhtälö $75(25 - v) + 75(25 + v) = 7(625 - v^2)$.)

173. Arvoilla $a = -3$ ja $a = \frac{1}{2}$.

Kun $a = -3$, raja-arvo on -7;

kun $a = \frac{1}{2}$, raja-arvo on 7.

(Lausekkeen tulee olla kohdassa a ”muotoa $\frac{0}{0}$”, eli luvun a tulee olla jompikumpi osoittajan nollakohdista -3 ja $\frac{1}{2}$.

Kun $a = -3$, lauseke on $\dfrac{2(x+3)(x-\frac{1}{2})}{x+3}$.

Kun $a = \frac{1}{2}$, lauseke on $\dfrac{2(x+3)(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$.)

174. $x < -55\frac{2}{9}$ tai $x > 55\frac{8}{9}$

(Epäyhtälö sievenee muotoon $\left|\dfrac{5}{9x-3}\right| < 0{,}01$ eli $\dfrac{5}{|9x-3|} < 0{,}01$. Epäyhtälö voidaan kertoa nimittäjällä $|9x-3|$, joka on koko määrittelyjoukossa $x \neq \frac{1}{3}$ positiivinen. Saadaan epäyhtälö $|9x-3| > 500$, joka toteutuu, kun $9x-3 > 500$ tai $9x-3 < -500$.)

175. $x < -3$ tai $\frac{1}{2} < x < 2$

(Tulee olla $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1-3x}{x-2} < 0$ eli $\dfrac{2x^2+5x-3}{3(x-2)} < 0$. Funktio $\dfrac{2x^2+5x-3}{3(x-2)}$ ei ole määritelty kohdassa 2 ja funktion nollakohdat ovat -3 ja $\frac{1}{2}$. Merkkien selvittämiseksi lasketaan funktion arvot esimerkiksi kohdissa -4, 0, 1 ja 3.)

176. a) Nopeuksien v_1 ja v_2 harmoninen keskiarvo on $\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}{2}} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Olkoon s koko matkan pituus.
Matkaan kulunut aika on

$\frac{s}{2} : v_1 + \frac{s}{2} : v_2$ ja

keskinopeus koko matkalla

$s : (\frac{s}{2} : v_1 + \frac{s}{2} : v_2)$.

Lauseke sievenee muotoon $\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Kysytty keskinopeus on 53 km/h.

b) Lukujen a ja b harmoninen keskiarvo on $\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \dfrac{2ab}{a+b}$.

On todistettava epäyhtälö $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a+b}$.

Koska $a+b > 0$, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $\sqrt{ab}\,(a+b) \geqslant 2ab$ kanssa ja edelleen, koska $\sqrt{ab} > 0$, epäyhtälön $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ kanssa.
Tämä epäyhtälö on tosi, koska
$a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.
Koska epäyhtälön $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a+b}$ molemmat puolet ovat epänegatiiviset, voidaan tutkia myös neliöön korotettua yhtäpitävää epäyhtälöä $ab \geqslant \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$.

177. a) Epäyhtälö (i) on yhtäpitävä epäyhtälön $2a^2 + 2b^2 \geqslant (a+b)^2$ kanssa ja tosi, koska
$2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$= (a-b)^2 \geqslant 0$.
Epäyhtälö (ii) on yhtäpitävä epäyhtälön $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ kanssa ja tosi, koska
$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geqslant 0$.

b) $\frac{25}{2}$ (Epäyhtälön (i) nojalla

$(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 \geqslant \frac{1}{2}(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2$

$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2$. Epäyhtälön (ii) nojalla

$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2 \geqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{4}{x+y})^2 = \frac{1}{2}(1+4)^2$.

Siis $(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Kun $x = y = \frac{1}{2}$, lausekkeen arvo on $\frac{25}{2}$.)

Eksponentti- ja logaritmifunktio

178. $m(t) = 0{,}83^t \cdot 75$

a) 57 mg b) 88 mg $(0{,}83^{-\frac{20}{24}} \cdot 75)$

179. a) $x = \frac{1}{2}$ $(3^{x+1} = 3^{3x})$

b) $x = \frac{3}{5}$ $(10^{2x} = 10^{3(1-x)})$

180. $-1 < x < 0$ (Koska funktio e^x on aidosti kasvava, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $x^2 < -x$ kanssa.)

181. a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 1
d) 0 e) -1 f) -4

182. a) 1 003 b) -5
c) 3 d) -1

183. a) 7 b) $\frac{1}{7}$ c) 13

184. a) 16 (2^4) b) e^2 c) 3 $(x - 2 = 1)$

185. $1{,}8 \cdot 10^{15}$ $(\lg x = \frac{12{,}5}{0{,}82}$, joten $x = 10^{\frac{12{,}5}{0{,}82}}$.)

186. a) $x = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$

b) $x = 0$ tai $x = \ln 2$ $(x(e^x - 2) = 0)$

c) $x = -2$ $((x+2)e^x = 0$ ja $e^x > 0$ kaikilla $x)$

187. a) 5 $(k^2 = 25$ ja $k > 0)$

b) $\sqrt[25]{2}$ $(k^{25} = 2)$

188. a) $5 \ln x$ b) $\frac{1}{2}\ln x$

c) $\ln 3 + \ln x - \ln 2$

d) $\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln x$

189. $\lg 43^{679} \approx 1\,109{,}13$; 1 110 numeroa
($\lg 43^{679} = 679 \lg 43$. Koska $43^{679} \approx 10^{1\,109{,}13}$, luvussa on yhtä monta numeroa kuin luvussa 10^{1109}.)

190. $49\frac{1}{7}$ $(e^{2\ln 7} + e^{-\ln 7} = e^{\ln 7^2} - e^{\ln 7^{-1}}$

$= 7^2 + 7^{-1} = 49\frac{1}{7}$. Voidaan myös laskea

$e^{2\ln 7} = (e^{\ln 7})^2 = 7^2$ ja $e^{-\ln 7} = \frac{1}{e^{\ln 7}} = \frac{1}{7}$.)

191. 1

192. 2 $(\log_3((4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})) = \log_3 9)$

193. $\log x$ $(\log x^3 - \log y - 2\log x + 2\log\sqrt{y} =$

$3\log x - \log y - 2\log x + 2 \cdot \frac{1}{2}\log y$.

Merkintä log tarkoittaa, että logaritmin kantaluku voi olla mikä tahansa.)

194. 25 (Yhtälö on määritelty, kun $x > 21$. Yhtälö saadaan muotoon
$\lg(x(x-21)) = \lg 10^2$, josta $x(x-21) = 100$.)

195. $\log_5 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0{,}6826$

(Ratkaistaan yhtälö $5^x = 3$.)

196. $x \approx 29{,}7$ (Yhtälö jaetaan ensin a:lla, jolloin saadaan yhtälö $1{,}07^x = 7{,}45$. Yhtälö toteutuu, kun $x = \dfrac{\ln 7{,}45}{\ln 1{,}07}$.)

197. $x > \dfrac{\lg 0{,}4}{\lg 0{,}95} \approx 17{,}9$ (Tulee olla $0{,}95^x < 0{,}4$. Kun epäyhtälöä ratkaistaessa epäyhtälö $x \lg 0{,}95 < \lg 0{,}4$ jaetaan $\lg 0{,}95$:llä, epäyhtälön suunta vaihtuu, sillä $\lg 0{,}95 \approx -0{,}022 < 0$. Ratkaisussa voidaan käyttää myös luonnollista logaritmia.)

198. a) $-6e^{-6x}$

b) $-10xe^{-5x^2}$ $\left(\dfrac{1}{e^{5x^2}} = e^{-5x^2}\right)$

c) $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$ $\left(\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\right)$

199. a) $\dfrac{\ln 3}{2}$ (Derivaattafunktio on $2e^{2x} - 6$. Yhtälö $2e^{2x} - 6 = 0$ eli yhtälö $e^{2x} = 3$ toteutuu, kun $2x = \ln 3$.)

b) 0 ja 2 (Derivaattafunktio on $(2x - x^2)e^{-x}$. Koska $e^{-x} > 0$ kaikilla x, yhtälö $(2x - x^2)e^{-x} = 0$ toteutuu, kun $2x - x^2 = 0$.)

200. a) $\dfrac{4}{x}$

b) $\dfrac{1}{x}$ $(\ln 4x = \ln 4 + \ln x)$

c) $\dfrac{1}{5x}$ $\left(\dfrac{\ln x}{5} = \dfrac{1}{5}\ln x\right)$

d) $\dfrac{1}{x}$ $\left(\ln \dfrac{x}{5} = \ln x - \ln 5\right)$

201. a) $\dfrac{4x^3}{x^4 + 1}$ b) $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

202. e^{-2} (Derivaattafunktio on $1 + 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = 2 + \ln x$, missä $x > 0$.)

203. 5 $\left(\dfrac{k^6\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}} = k^{6 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = k^5\right)$

204. $\dfrac{4}{5}$, $x = \ln \dfrac{1}{5} = -\ln 5$

($2 \ln 2 = \ln 4$, joten $f(2 \ln 2) = f(\ln 4) = \dfrac{e^{\ln 4}}{1 + e^{\ln 4}} = \dfrac{4}{1 + 4} = \dfrac{4}{5}$. Arvo tulee laskea käyttäen logaritmin ominaisuuksia, ei laskimella (laskimella voi tarkistaa). Yhtälö $\dfrac{e^x}{1 + e^x} = \dfrac{1}{6}$ kerrotaan ristiin ja ratkaistaan $e^x = \dfrac{1}{5}$.)

205. 19 vuoden kuluttua (Olkoon normitaso a. Hallintokustannukset ovat nyt $1{,}45a$. Ratkaistaan epäyhtälö $0{,}98^n \cdot 1{,}45a < a$. Epäyhtälö toteutuu, kun $n > \dfrac{\ln \frac{1}{1{,}45}}{\ln 0{,}98} \approx 18{,}4$.)

206. $3\dfrac{1}{27}$ (Yhtälö $e^{2x} = 9$ toteutuu, kun $2x = \ln 9$ eli $x = \dfrac{1}{2}\ln 9 = \dfrac{1}{2}\ln 3^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 3 = \ln 3$. Tällöin $e^x + e^{-3x} = e^{\ln 3} + e^{-3 \ln 3}$ $= e^{\ln 3} + e^{-\ln 3^3} = 3 + \dfrac{1}{3^3}$.)

207. a) $x = 0$ tai $x = \ln 3$ (tulon nollasääntö)

b) $x = \ln 4$ (Kertolaskun jälkeen yhtälö tulee muotoon $e^{2x} - 4e^x = 0$ eli $e^x(e^x - 4) = 0$.)

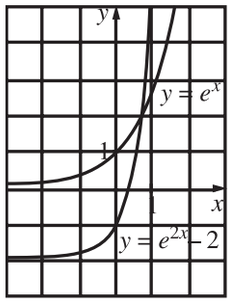
208. kun $-\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1$ tai $1 < x < 2$

($\dfrac{x}{x-1}$ on määritelty, kun $x \neq 1$, $\lg(2 - x)$ on määritelty, kun $x < 2$, ja $\sqrt{5x + 3 - 2x^2}$ on määritelty, kun $5x + 3 - 2x^2 \geqslant 0$ eli kun $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$.)

209. 34 vuodessa (Epäyhtälö on $1{,}0425^x \cdot 5\,000 > 1{,}0320^x \cdot 7\,000$, joka saadaan muotoon $\left(\frac{1{,}0425}{1{,}0320}\right)^x > 1{,}4$. Vastaus pyöristetään ylöspäin kokonaiseksi vuodeksi.)

210. $2 - e^{-1} < x < 2$ (Määrittelyehto on $x < 2$. Koska luonnollinen logaritmifunktio on aidosti kasvava, epäyhtälö $\ln(2-x) < -1$ eli $\ln(2-x) < \ln e^{-1}$ toteutuu, kun $2 - x < e^{-1}$ eli $x > 2 - e^{-1}$.)

211. $x > \ln 2$



(Kun merkitään $e^x = t$, saadaan epäyhtälö $t < t^2 - 2$ eli $t^2 - t - 2 > 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $t < -1$ tai $t > 2$. Siis tulee olla $e^x < -1$ tai $e^x > 2$. Ensimmäinen epäyhtälö ei toteudu millään muuttujan arvoilla.)

212. a) 200/24° ja 3200/36°
(Kun $S° = 36$, niin $\lg S = 3{,}5$ ja $S = 10^{3{,}5}$.)
b) $S° = 1{,}0034D - 0{,}072100$
($S° = 1 + 10\lg(25 \cdot 2^{\frac{D-15}{3}})$
$= 1 + 10(\lg 25 + \frac{D-15}{3}\lg 2)$

213. $x = -2$ (Yhtälö on määritelty, kun $-3 \leqslant x \leqslant 7$. Yhtälö voidaan saattaa muotoon $\log_3 \sqrt{7-x} = \log_3(3(x+3))$, tai se voidaan ensin kertoa 2:lla yhtälöksi $\log_3(7-x) = 2\log_3(x+3) + 2$, joka saadaan muotoon $\log_3(7-x) = \log_3(9(x+3)^2)$.)

214. $2\log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
$= \log_2(8 - 4\sqrt{3}) = \log_2 4(2 - \sqrt{3})$
$= \log_2(2 - \sqrt{3}) + \log_2 4 = \log_2(2 - \sqrt{3}) + 2$

215. 5 250 vuotta (Koska $N_0 \cdot e^{-1580\lambda} = \frac{1}{2}N_0$ eli $e^{-1580\lambda} = \frac{1}{2}$, niin $-1580\lambda = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ ja $\lambda = \frac{\ln 2}{1580}$.
Yhtälö $N_0 \cdot e^{-\lambda t} = 0{,}1N_0$ eli
yhtälö $e^{-\lambda t} = 0{,}1$ toteutuu, kun
$-\lambda t = \ln 0{,}1$ eli kun $t = -\frac{\ln 0{,}1}{\lambda}$.)

216. 65 % (Potenssikaavoilla: Yhtälöstä saadaan
$y(x) = e^{\frac{x}{2} + 10^5} = e^{10^5} e^{\frac{x}{2}}$. $\frac{y(x+1)}{y(x)} = \frac{e^{\frac{x+1}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}$
$= e^{\frac{x+1}{2} - \frac{x}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$.
Logaritmikaavoilla:
$\ln\frac{y(x+1)}{y(x)} = \ln y(x+1) - \ln y(x)$
$= (\frac{x+1}{2} + 10^5) - (\frac{x}{2} + 10^5) = \frac{1}{2}$,
joten $\frac{y(x+1)}{y(x)} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$.
Ratkaisun tulee osoittaa, että suhde on x:n arvosta riippumaton, joten yksittäisillä arvoilla tehdyt laskut eivät kelpaa ratkaisuksi.)

217. $x = \frac{1}{2}$ $((f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x)) = e^{2\ln x}$
$= e^{\ln x^2} = x^2$.
Koska $\ln x$ on määritelty, kun $x > 0$, funktio $(f \circ g)(x)$ on määritelty, kun $x > 0$.
$(g \circ f)(x^3) = g(f(x^3)) = g(e^{2x^3}) = \ln e^{2x^3} = 2x^3$.
Funktio $(g \circ f)(x^3)$ on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla. Ratkaistaan yhtälö $x^2 = 2x^3$ määrittelyjoukossa $x > 0$.)

218. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eli $x \neq 0$

b) $f(-x) = \dfrac{\frac{1}{2^x} + 1}{\frac{1}{2^x} - 1} = \dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x} = -f(x)$

c) Yhtälön $f(x) = 2$ ratkaisu on
$x = \log_2 3 \approx 1{,}585$, ja
yhtälön $f(x) = -2$ ratkaisu on
$x = -\log_2 3 \approx -1{,}585$.
(Tarkat arvot voidaan ilmaista myös muodoissa $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ ja $-\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ tai $\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$ ja $-\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$.
Yhtälöt voidaan ratkaista merkitsemällä $2^x = t$.
Jälkimmäisen yhtälön ratkaisun voi päätellä ensimmäisen ratkaisusta b-kohdan avulla.)

219. $f'(x) = x^{-x}(-\ln x - 1)$, nollakohta $\dfrac{1}{e}$

($f(x) = (e^{\ln x})^{-x} = e^{-x \ln x}$, joten
$f'(x) = e^{-x \ln x}\, \mathrm{D}(-x \ln x)$.)

220. Ei yhtään juurta, kun $c > \dfrac{1}{4}$,

yksi juuri, kun $c \leqslant 0$ tai $c = \dfrac{1}{4}$, ja

kaksi juurta, kun $0 < c < \dfrac{1}{4}$.

(*Tapa 1.* Merkitsemällä $e^x = t$ saadaan toisen asteen yhtälö $t^2 - t + c = 0$. Jos tällä yhtälöllä on ainakin yksi juuri ($D = 1 - 4c \geqslant 0$), niin alkuperäinen yhtälö toteutuu, kun
$e^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$, jossa $\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ on aina positiivinen. Yhtälöllä $e^{2x} - e^x + c = 0$ ei ole yhtään juurta, kun $D < 0$, kaksi juurta, kun $D > 0$ ja $1 - \sqrt{1 - 4c} > 0$, ja muulloin yksi juuri.

Tapa 2. Selvitetään funktion $f(x) = e^{2x} - e^x$ kulku. Osoittautuu, että funktio on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, \ln \frac{1}{2}]$, aidosti kasvava välillä $[\ln \frac{1}{2}, \infty[$ ja saa kohdassa $\ln \frac{1}{2}$ pienimmän arvon $-\frac{1}{4}$. Lisäksi $e^{2x} - e^x \to \infty$, kun $x \to \infty$, ja $e^{2x} - e^x \to 0$, kun $x \to -\infty$.
Tulokseen päästään, kun (kuvaajan tuella) tutkitaan, kuinka c:n lisääminen vaikuttaa nollakohtien lukumäärään.)

221. 3 918 990 numeroa, ensimmäinen numero 1 ja toinen 5
a) Koska Prothin luku on alkuluku, sen viimeinen numero ei voi olla nolla. Siis luvussa on yhtä monta numeroa ja samat ensimmäiset numerot kuin luvussa $19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586}$.
Logaritmikaavojen avulla saadaan
$\lg(19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586}) \approx 3\,918\,989{,}1786$, joten
$19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586} \approx 10^{3\,918\,989{,}1786}$.
Siis luvussa on 3 918 990 numeroa.
Koska $10^{3\,918\,989{,}1786} \approx 10^{0{,}1786} \cdot 10^{3\,918\,989}$
$\approx 1{,}508 \cdot 10^{3\,918\,989}$,
ensimmäiset numerot ovat 1 ja 5.
b) Esimerkiksi näin: Jos olisi
$19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586} + 1 = 2^n - 1$, niin olisi
$19\,249 \cdot 2^{13\,018\,586} + 2 = 2^n$ ja edelleen
$19\,249 \cdot 2^{13\,018\,585} + 1 = 2^{n-1}$.
Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska vasemmanpuoleinen luku on pariton ja oikeanpuoleinen parillinen.

222. Lausekkeet ovat määritellyt, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$ ja $b > 0$ ja $b \neq 1$.
$\log_a b = \log_b a$, kun a ja b ovat yhtä suuret tai toistensa käänteisluvut.
($\log_a b = \log_b a = u$, jos ja vain jos $b = a^u$ ja $a = b^u$. Tällöin $b = (b^u)^u = b^{u^2}$, joten $u^2 = 1$.)

223. a) Ilmaistaan logaritmit luonnollisen logaritmin avulla. Tällöin

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$$

$$= \frac{1}{\frac{\ln x}{\ln a}} + \frac{1}{\frac{\ln x}{\ln b}}$$

$$= \frac{\ln a + \ln b}{\ln x} = \frac{\ln ab}{\ln x} = \frac{1}{\log_{ab} x}.$$

b) 32 838,4 (a-kohdan mukaan summan arvo on $\frac{1}{\log_{5000!}\pi} = \frac{\ln 5000!}{\ln \pi}$.

Stirlingin kaavan mukaan $n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n}$,

joten $\ln n! \approx \ln\sqrt{2\pi n} + n \ln n - n$.)

Trigonometriset funktiot

224. a) $\alpha = n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = 90° + n \cdot 180°$, n kokonaisluku
c) $\alpha = 180° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
d) $\alpha = 90° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku

225. a) $\alpha = n \cdot 60°$, n kokonaisluku
($3\alpha = n \cdot 180°$)
b) $\alpha = n \cdot 180°$, n kokonaisluku
($2\alpha = n \cdot 360°$)

226. a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

227. a) $\alpha = n \cdot 180°$, n kokonaisluku
b) $\alpha = n \cdot 45°$, n kokonaisluku
($4\alpha = n \cdot 180°$)

228. suurin arvo 4, pienin arvo -2,
arvojoukko $[-2, 4]$
(Funktion $\sin 2\alpha$ arvojoukko on $[-1, 1]$.)

229. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$
$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$
$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

230. $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$, $\tan\alpha = -\frac{40}{9}$

231. $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (Piirtämällä suorakulmainen kolmio, jossa kulman vastainen kateetti on 2 ja viereinen 1, nähdään, että sinin itseisarvo on $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja kosinin $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Valitaan merkkiympyröiden avulla oikeat merkit.)

232. $0 \leqslant a \leqslant 1$ (Yhtälö on $\sin\alpha = 2a - 1$. Yhtälöllä on juuria, kun $-1 \leqslant 2a - 1 \leqslant 1$.)

233. a) $\alpha \approx 132° + n \cdot 360°$ tai
$\alpha \approx -132° + n \cdot 360°$, n kokonaisluku
b) $\alpha \approx 29° + n \cdot 360°$ tai $\alpha \approx 151° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku
c) $\alpha \approx 26° + n \cdot 180°$ tai $\alpha \approx -26° + n \cdot 180°$,
n kokonaisluku

234. a) $\alpha = 30° + n \cdot 360°$ tai $\alpha = -30° + n \cdot 360°$,
n kokonaisluku
b) $\alpha = 15° + n \cdot 120°$ tai $\alpha = 45° + n \cdot 120°$,
n kokonaisluku

235. $\alpha = 7{,}5° + n \cdot 30°$, n kokonaisluku

236. a) $-42{,}18°$ $(-0{,}7361 \cdot \frac{180°}{\pi})$
b) 111,6°

237. a) 300° b) $-165°$

238. a) $-\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{4}$
c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{7\pi}{6}$

239. a) $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku
($\sin x = -1$)
b) $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$, n kokonaisluku ($3x = n \cdot \pi$)
c) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku
($\sin 2x = 1$, kun $2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.)

240. määrittelyjoukko $\mathbb{R}$; suurin arvo 3 kohdissa $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku, ja pienin arvo 1 kohdissa $x = n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (Koska $\cos x \leqslant 1$ kaikilla x, niin $5 - 4\cos x \geqslant 5 - 4 \cdot 1 = 1 > 0$. Suurin arvo on $\sqrt{5 - 4 \cdot (-1)}$ ja pienin arvo $\sqrt{5 - 4 \cdot 1}$.)

241. jakso $\frac{\pi}{2}$, arvojoukko $[-3, 3]$

242. suurin arvo 3, pienin arvo 1

(Funktion $\cos^2 \frac{x}{2}$ arvojoukko on $[0, 1]$.)

243. $x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$, n kokonaisluku

244. $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\tan x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

245. Lausekkeilla $1 + \tan^2 x$ ja $\frac{1}{\cos^2 x}$ on sama määrittelyjoukko $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku, ja $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

246. $3 \leqslant a \leqslant 5$ (Yhtälöllä $\sin x = 4 - a$ on ratkaisuja, kun $-1 \leqslant 4 - a \leqslant 1$ eli kun $4 - a \geqslant -1$ ja $4 - a \leqslant 1$.)

247. a) 0,909 ja 2,232 b) 1,271 ja 5,012

248. a) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (yhtälö $\sin x = \frac{1}{2}$)

b) $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai $x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku ($2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $2x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$)

249. $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku ($\sin x(2\cos x + 1) = 0$ eli $\sin x = 0$ tai $\cos x = -\frac{1}{2}$)

250. a) $3\cos 3x + 5\cos x$
b) $-2\sin 2x + 2\cos x \sin x$

251. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

($f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ ja $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}$)

252. $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai $x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, n kokonaisluku ($f'(x) = 4\cos 4x - 2$ ja $f'(x) = 0$, kun $\cos 4x = \frac{1}{2}$ eli kun $4x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $4x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$.)

253. $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}$ (Kolmion kulmien summa on π, joten $x + 2x + 3x = \pi$ ja siis $x = \frac{\pi}{6}$. Lasketaan $(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2})^2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1)^2 = (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2$. Voidaan käyttää myös asteita, jolloin $x + 2x + 3x = 180°$ ja $x = 30°$.)

254. $\frac{5\pi}{12}$ (Yhtälö $\sin 2x = \frac{1}{2}$ toteutuu, kun $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku. Välillä $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ on juuri $\frac{5\pi}{12}$.)

255. $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

($\tan x = \frac{3}{2}$)

256. $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

(Ratkaistaan ensin $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.)

257. suurin arvo 5, kun $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n kokonaisluku, pienin arvo $\frac{5}{7}$, kun $x = n\pi$, n kokonaisluku (Sana argumentti tarkoittaa muuttujaa. Koska $\cos 2x \geqslant -1$ kaikilla x, niin $4 + 3\cos 2x \geqslant 4 + 3 \cdot (-1) = 1$ kaikilla x. Siis nimittäjä on aina positiivinen, joten funktion f arvo on suurin, kun nimittäjän arvo on pienin, ja funktion f arvo on pienin, kun nimittäjän arvo on suurin. Koska funktion $\cos 2x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, nimittäjän suurin arvo on $4 + 3 \cdot 1 = 7$ ja pienin arvo $4 + 3 \cdot (-1) = 1$. Funktio saa suurimman arvon kohdissa, joissa $\cos 2x = -1$, ja pienimmän kohdissa, joissa $\cos 2x = 1$.)

258. $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (Yhtälö on $2\sin^2 x - \sin x = 0$ eli $\sin x(2\sin x - 1) = 0$, ja se toteutuu, kun $\sin x = 0$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.)

259. $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (Merkitään $\cos x = t$, jolloin saadaan yhtälö $2t^2 - 3t - 2 = 0$, joka toteutuu, kun $t = 2$ tai $t = -\frac{1}{2}$. Siis $\cos x = 2$ tai $\cos x = -\frac{1}{2}$. Ensimmäisellä yhtälöllä ei ole juuria, koska $\cos x \leqslant 1$ kaikilla x.)

260. $x = \pi + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (Yhtälö tulee muotoon $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, josta $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$.)

261. $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku (Yhtälö toteutuu, kun $\sin x + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ tai $\sin x + \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ eli kun $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\sin x = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole juuria, koska $-\frac{5\sqrt{3}}{2} < -1$.)

262. $x = n \cdot \frac{2\pi}{5}$, n kokonaisluku (Yhtälö toteutuu, kun $3x = 2x + n \cdot 2\pi$ tai $3x = -2x + n \cdot 2\pi$. Ensimmäisestä saadaan $x = n \cdot 2\pi$ ja jälkimmäisestä $x = n \cdot \frac{2\pi}{5}$. Ensimmäinen ratkaisuparvi sisältyy jälkimmäiseen.)

263. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n kokonaisluku

(D $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1)$

$= \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Yhtälö $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ toteutuu, kun

$\frac{\pi}{2} - x = x + n \cdot 2\pi$ tai

$\frac{\pi}{2} - x = \pi - x + n \cdot 2\pi$.

Jälkimmäinen yhtälö ei toteudu millään x:n arvolla.)

264. $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku (Yhtälö tulee muotoon $\tan^3 x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, josta $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.)

265. $a \leqslant -2$ tai $a \geqslant 0$ (Yhtälö tulee muotoon $\sin x = \dfrac{2a-1}{a^2+1}$.

Yhtälöllä on juuria, kun $-1 \leqslant \dfrac{2a-1}{a^2+1} \leqslant 1$ eli kun $\dfrac{2a-1}{a^2+1} \geqslant -1$ ja $\dfrac{2a-1}{a^2+1} \leqslant 1$.

Koska $a^2 + 1 > 0$ kaikilla a, epäyhtälöt voidaan kertoa $a^2 + 1$:llä.

Epäyhtälö $2a - 1 \geqslant -(a^2 + 1)$ toteutuu, kun $a \leqslant -2$ tai $a \geqslant 0$.

Epäyhtälö $2a - 1 \leqslant a^2 + 1$ toteutuu kaikilla a:n arvoilla.)

266. $x = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,

n kokonaisluku ($1 - \sin^2 x = \sin x + \dfrac{1}{4}$ eli

$\sin^2 x + \sin x - \dfrac{3}{4} = 0$. Sijoittamalla $\sin x = t$

saadaan yhtälö $t^2 + t - \dfrac{3}{4} = 0$, joka toteutuu,

kun $t = \dfrac{1}{2}$ tai $t = -\dfrac{3}{2}$.

Siis $\sin x = \dfrac{1}{2}$ tai $\sin x = -\dfrac{3}{2}$.)

267. Määritelty, kun $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku. Derivoimalla ja käyttämällä kaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ saadaan $f'(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

Siis $f'(x) \cos x = f(x)$.

268. Lausekkeilla on sama määrittelyjoukko $x \neq n \cdot \dfrac{\pi}{2}$, n kokonaisluku.

$$\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 2 = (\tan x + \frac{1}{\tan x})^2$$

$$= (\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x})^2 = (\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x})^2$$

$$= (\frac{1}{\sin x \cos x})^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

269. Pienin $\ln(7012\pi)$, suurin $\ln(140\,824\pi)$, juuria on 133 813.

(Yhtälö $\sin e^x = 0$ toteutuu, kun $e^x = n\pi$ eli $x = \ln(n\pi)$, missä $n > 0$ on kokonaisluku. Tulee olla $10 \leqslant \ln(n\pi) \leqslant 13$ eli

$e^{10} \leqslant n\pi \leqslant e^{13}$ eli $\dfrac{e^{10}}{\pi} \leqslant n \leqslant \dfrac{e^{13}}{\pi}$ eli

likimain $7\,011{,}24 \leqslant n \leqslant 140\,824{,}56$.)

270. $x = \dfrac{1}{1 + n\pi}$, n kokonaisluku ja $n \neq 0$

(Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 0$. Funktion f derivaattafunktio on

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1-x}{x}$. $f'(x) = 0$, kun

$\dfrac{1-x}{x} = n\pi$, n kokonaisluku. Derivaattafunktion nollakohdat ovat kohdat $x = \dfrac{1}{1 + n\pi}$.

Epäyhtälö $\left|\dfrac{1}{1 + n\pi}\right| < 1$ toteutuu, kun $|1 + n\pi| > 1$ eli kun $1 + n\pi > 1$ tai $1 + n\pi < -1$. Saadaan $n > 0$ tai $n < -\dfrac{2}{\pi}$ eli kaikki kokonaisluvut paitsi 0.)

271. Luvut, joille pätee $-2 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ tai $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$. (Ratkaisukaavalla saadaan $x = \dfrac{-24\cos a \pm 40}{32}$. Koska kosinin arvojoukko on $[-1, 1]$, niin suurin muotoa $\dfrac{-24\cos a + 40}{32}$ oleva luku on $\dfrac{-24 \cdot (-1) + 40}{32} = 2$ ja pienin $\dfrac{-24 \cdot 1 + 40}{32} = \dfrac{1}{2}$.)

272. $x = 2\cos\frac{2\pi}{9} \approx 1{,}5320$ tai

$x = 2\cos\frac{8\pi}{9} \approx -1{,}8794$ tai

$x = 2\cos\frac{14\pi}{9} \approx 0{,}3473$ (Saadaan yhtälö $8t^3 - 6t + 1 = 0$ eli yhtälö $4t^3 - 3t = -\frac{1}{2}$. Sijoittamalla $t = \cos u$ saadaan yhtälö $\cos 3u = -\frac{1}{2}$, josta $u = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $u = -\frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku. Ratkaisuparvista saadaan kolme eri suurta t:n arvoa: $t = \cos\frac{2\pi}{9}$, $t = \cos\frac{8\pi}{9}$ ja $t = \cos\frac{14\pi}{9}$. Koska kolmannen asteen yhtälöllä on enintään kolme juurta, yhtälöllä ei ole muita juuria. Voidaan myös käyttää asteita: $x = 2\cos 40°$ jne.)

Tasogeometria

273. 142°

274. 54° (Olkoot α ja β kolmion kaksi muuta kulmaa. Puolittajien ja 72°:n kulman vastaisen sivun muodostamasta kolmiosta saadaan puolittajien välinen tylppä kulma $180° - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ $= 180° - \frac{1}{2} \cdot 108°$. Koska kahden muun kulman suuruutta ei ole annettu, lasku on suoritettava käyttämällä kirjaimia.)

275. a) 34° (Puolet keskuskulmasta 68°.)
b) 28° (Sama kaari kuin 28°:n kulmalla.)

276. $\frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ (Ympyrän keskipiste on hypotenuusan keskipisteessä, joten säde on puolet hypotenuusan pituudesta 13.)

277. 7,6 cm (Kaarta vastaava keskuskulma on $2 \cdot 42° = 84°$, joten kaaren pituus $b = \frac{84°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 5{,}2$ cm.)

278. 4 cm:n etäisyydeltä arkin päästä (Jos x (cm) on leikkauskohdan etäisyys arkin päästä, niin tulee olla $\frac{12}{x} = \frac{40 - x}{12}$.)

279. $5\frac{5}{11}$ (Pythagoraan lauseella saadaan kolmion korkeus 12. Neliön yläpuolelle jäävä kolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa (yhtä suuret samankohtaiset kulmat, kk). Jos x on neliön sivu, niin $\frac{12 - x}{12} = \frac{x}{10}$.)

280. 56 % (Tölkkien vaipat ovat yhdenmuotoisia kuvioita, joten $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{7{,}8}{11{,}7}\right)^2 \approx 0{,}44 = 44\ \%$.)

281. 96 cm^2 (Erottuva kolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa (yhtä suuret samankohtaiset kulmat, kk). Sen pinta-alan suhde koko kolmion pinta-alaan on $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Puolisuunnikkaan pinta-ala on $\frac{16}{25} \cdot 150$ cm^2.)

282. 29 % (Yhdenmuotoisuussuhde on kirjaimen ja vastinkirjaimen korkeuksien suhde $\frac{h_2}{h_1}$. Pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö. $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{50}{100}$, joten $\frac{h_2}{h_1} \approx 0{,}71$.)

283. a) $2\sqrt{3}\,a$ b) $4\sqrt{3}\,a^2$
(Korkeus voidaan laskea Pythagoraan lauseella. Voidaan myös käyttää muistikolmiota, jonka mukaan korkeuden suhde sivun pituuteen on $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Voidaan myös käyttää taulukkokirjan valmiita kaavoja.)

284. a) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{a^2}{4}$

(Kolmion kannalle piirretty korkeus on $\frac{a}{2}$.)

285. korkeus $\frac{\sqrt{7}}{2}a$, pinta-ala $\frac{3\sqrt{7}}{4}a^2$

286. 12 km:n päähän ($x^2 = (r + 0{,}012)^2 - r^2$, missä $r = \frac{40000}{2\pi}$ on maapallon säde.

Lauseke kannattaa näppäillä sellaisenaan käyttämällä laskimessa olevaa r:n arvoa (Ans -näppäin).)

287. 13 cm (Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka rajaavat jänteen keskipisteeseen ja päätepisteeseen piirretyt säteet ja jänteen puolikas, saadaan yhtälö $r^2 = (r - 6)^2 + 11^2$.)

288. $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$ (Jos ympyrän säde on r, niin neliön sivu on $\frac{2r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,r$ (muistikolmio tai Pythagoraan lause). Neliön pinta-ala on $2r^2$ ja ympyrän πr^2.)

289. On. (Laskemalla pituuksien likiarvot nähdään, että sivu, jonka pituus on $2\sqrt{2}$, on kolmion pisin sivu. Osoittautuu, että $(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, joten Pythagoraan lauseen käänteislauseen nojalla kolmio on suorakulmainen.)

290. Korkeusjanan pisteessä, jonka etäisyys kannasta on 6.

291. $BP = 1\frac{2}{3}$ ja $CP = 2\frac{1}{3}$

(Kulmanpuolittajalauseen mukaan $BP : CP = 5 : 7$.)

292. a) $\frac{5\sqrt{3}}{6}a$ ($\frac{1}{3}$ korkeusjanasta. Korkeusjanan pituus saadaan Pythagoraan lauseella tai muistikolmiosta tai taulukkokirjasta.)

b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a$ ($\frac{2}{3}$ korkeusjanasta)

293. sini $\frac{\sqrt{5}}{3}$, kosini $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma, joten pienimmät kulmat ovat kolmion kantakulmat α. Kolmion kannalle piirretty korkeus on $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, joten $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{6}$. Sama suhde on huippukulman puolikkaan kosini. Vastaukseksi on annettava suhteiden tarkat arvot.)

294. 20 m (37 tan 28°)

295. 3,7 km:n päässä ($\frac{109}{\tan 1{,}7°}$)

296. 13 cm (Kaaren keskuskulma on $\alpha = \frac{15}{48} \cdot 360° = 112{,}5°$.

Tasakylkisen kolmion puolikkaasta saadaan jänteen puolikkaan pituus $r \sin\frac{\alpha}{2}$,

missä $r = \frac{48}{2\pi}$ (cm) on ympyrän säde.)

297. 36,9° (Merkitään suorakulmion sivuja a ja $3a$. Ensin voidaan laskea esimerkiksi halkaisijan ja lyhyemmän sivun välinen kulma β, jolle $\tan\beta = \frac{3a}{a} = 3$. Kysytty kulma on $180° - 2\beta$.)

298. 11,6 cm^2 (kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava)

299. 131 cm^2 (Sektorin pinta-alasta vähennetään tasakylkisen kolmion pinta-ala.

$A = \frac{136°}{360°} \cdot \pi \cdot 12{,}5^2 - \frac{1}{2} \cdot 12{,}5^2 \sin 136°$.)

300. 52,8° tai 127,2° ($\sin\gamma = \frac{2 \cdot 20}{6{,}2 \cdot 8{,}1}$)

301. 9,9 cm $\left(\frac{x}{\sin 75°} = \frac{9{,}6}{\sin 70°}\right)$

302. 19,4 (30°:n kulman vastainen sivu x saadaan yhtälöstä $\frac{x}{\sin 30°} = \frac{10}{\sin 100°}$. Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x \cdot \sin 50°$.)

303. 10,7 cm

304. 108,2° (Suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma α, ja $5^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$.)

305. 94 metrin etäisyydellä (Etäisyys saadaan kosinilauseella. Voidaan myös käyttää hyväksi kolmion tasakylkisyyttä ja ratkaista ensin kannan puolikas.)

306. 5,0 cm ja 9,7 cm (Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon, jonka kahtena sivuna ovat lävistäjän puolikkaat ja näiden välisenä kulmana ensin $54°$ ja sitten $180° - 54° = 126°$.)

307. $1\frac{4}{5}$, $1\frac{2}{5}$ ja $1\frac{4}{5}$ (Päätyyn muodostuu suorakulmainen kolmio, joka on yhdenmuotoinen suorakulmion puolikkaan kanssa. Lasketaan lävistäjän pituus 5, jolloin kärjestä alkavan jako-osan pituus saadaan yhtälöstä $\frac{x}{3} = \frac{3}{5}$.)

308. Merkitään $\sphericalangle KAC = \alpha$. Koska kolmio KAC on tasakylkinen, niin $\sphericalangle KCA = \alpha$. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, niin $\sphericalangle CKA = 180° - 2\alpha$. Koska CKB on kulman CKA vieruskulma, niin $\sphericalangle CKB = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$.
Siis kehäkulma on puolet keskuskulmasta.

309. 22,6° (Merkitään neliön sivun pituutta a. Lasketaan suoran ja viereisen sivun välinen kulma α suorakulmaisesta kolmiosta. Vastaisen kateetin pituus x toteuttaa yhtälön $\frac{1}{2}xa = \frac{1}{3}a^2$, joten $x = \frac{2}{3}a$. Siis $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Kysytty kulma on $90° - 2\alpha$.)

310. Ei saa. (Kohta, joka on mahdollisimman etäällä jokaisesta sivusta, on saaren keskipiste. Keskipiste on korkeusjanalla (keskijanalla) ja jakaa sen sivusta lukien suhteessa 1 : 2.
Jos kolmion sivun pituus on a (m), niin kolmion korkeus (Pythagoraan lauseella) on $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ja pinta-ala $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Koska $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 50\,000$, niin $a \approx 339{,}91$ (m).

Keskipisteen etäisyys sivusta on $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 98{,}1$ m eli pienempi kuin 100 m.)

311. 49 cm:n ja 69 cm:n päässä A:sta (Viillot erottavat kolmion ABC kanssa yhdenmuotoiset kolmiot, joiden pinta-alat ovat $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ ABC:n pinta-alasta. Jos x on ensimmäisen viillon ja y toisen viillon aloituspaikan etäisyys A:sta, niin $\left(\frac{x}{85}\right)^2 = \frac{1}{3}$ ja $\left(\frac{y}{85}\right)^2 = \frac{2}{3}$.)

312. $\sphericalangle ACK$ ja $\sphericalangle ADB$ ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia, joten ne ovat yhtä suuret.
$\sphericalangle ABD$ on puoliympyrää vastaava kehäkulma ja siis suora kulma, joten $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AKC$.
Yhdenmuotoisuuslauseen kk nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

313. 1 : 4 (Olkoot kolmion kateetit a ja $2a$, jolloin hypotenuusa on $\sqrt{5}\,a$. Korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, jotka ovat yhdenmuotoisia keskenään ja koko kolmion kanssa.
Jos x on kateetin a puoleinen hypotenuusan osa, niin $\frac{x}{a} = \frac{a}{\sqrt{5}a}$, josta $x = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Jos y on toinen osa, niin $\frac{y}{2a} = \frac{2a}{\sqrt{5}a}$, josta $y = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.)

314. $-\frac{7}{9} \approx -0{,}778$ (Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kylki on $3a$ ja kannalle piirretty korkeus a. Kolmion kannan puolikas on $\sqrt{8}\,a$ (Pythagoras) ja kanta $2\sqrt{8}\,a$. Jos β on huippukulma, niin kosinilauseella saadaan $(2\sqrt{8}\,a)^2 = (3a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 3a \cdot \cos\beta$ eli $32 = 9 + 9 - 18\cos\beta$.)

315. $\frac{5a}{8}$ (Olkoon ympyrän säde r. Kun ympyrän keskipiste yhdistetään kärkiin, joiden kautta ympyrä kulkee, muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kylkien pituus on r, kanta a ja korkeus $a - r$. Tasakylkisen kolmion puolikkaasta saadaan yhtälö $(a-r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2$.)

316. tornin korkeus 76 m, etäisyydet 1 250 m ja 1 750 m (Kolmiossa, jonka kahtena sivuna ovat katsomispaikkojen etäisyydet huipusta, on yhden sivun pituus 500 m ja sivun viereisten kulmien suuruudet 2,5° ja $180° - 3{,}5° = 176{,}5°$. Kolmas kulma on 1,0°. Jos a on lähemmän katselupaikan etäisyys huipusta, niin sinilauseella saadaan

$$a = \frac{500 \sin 2{,}5°}{\sin 1{,}0°} \approx 1\,249{,}7 \text{ (m)}.$$

Tornin korkeus on $a \sin 3{,}5°$ ja katseluetäisyydet $a \cos 3{,}5°$ ja $500 + a \cos 3{,}5°$.)

317. Ei ole. (Tie erottaa A-keskisestä 60-säteisestä ympyrästä jänteen, jonka pituus on 38 (km). On laskettava jänteen lähemmän päätepisteen etäisyys B:stä.
Jänteen keskipisteen M etäisyys A:sta on

$$AM = \sqrt{60^2 - 19^2} = \sqrt{3239} \approx 56{,}91 \text{ (km)}.$$

Edelleen

$$MB = \sqrt{102^2 - 3239} = \sqrt{7165} \approx 84{,}65 \text{ (km)},$$

joten lähemmän päätepisteen etäisyys B:stä on $84{,}65 \text{ km} - 19 \text{ km} \approx 66 \text{ km} > 60 \text{ km}$.)

318. 440 km (Lentokoneesta piirretty maapallon isoympyrän tangentti sivuaa ympyrää laivan kohdalla. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän keskipiste, laiva ja lentokone. Jos α on maapallon keskipisteessä oleva kulma, niin $\cos\alpha = \frac{r}{r+15}$, missä r on maapallon säde. Kysytty ympyrän kaari on

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 12\,756.)$$

319. 1,37 km (Vaakasuora etäisyys vuoresta saadaan sinilauseella: $\frac{x}{\sin 65°} = \frac{4}{\sin 45°}$, josta

$$x = \frac{4 \sin 65°}{\sin 45°}.$$

Huipun korkeus on

$$x \tan 15° = \frac{4 \sin 65°}{\sin 45°} \cdot \tan 15°.)$$

320. 1 570 m (Olkoon piste C huipun projektio havaintopisteiden tasoon ja x huipun etäisyys tasosta. Valitaan yksiköksi kilometri.

Kolmiossa ABC on $AC = \frac{x}{\tan 17{,}4°}$ ja

$$BC = \frac{x}{\tan 14{,}5°}.$$

Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö

$$\left(\frac{x}{\tan 14{,}5°}\right)^2 = \left(\frac{x}{\tan^2 17{,}4°}\right)^2 + 9, \text{ josta}$$

$$x^2 = \frac{9 \tan^2 14{,}5° \tan^2 17{,}4°}{\tan^2 17{,}4° - \tan^2 14{,}5°}.)$$

321. 3,4 km tai 9,3 km (Ongelma voidaan ratkaista sekä sinilauseella että kosinilauseella. Sinilausetta käyttäen ratkaistaan ensin kolmion VSL (vene, satama, luoto) kulma L:

$\frac{6{,}7}{\sin\alpha} = \frac{3{,}6}{\sin 18°}$. Kulmia on kaksi:

$\alpha \approx 35{,}11°$ ja $\alpha \approx 180° - 35{,}11° = 144{,}89°$.
Määritetään näitä vastaavat kolmion kulmat S ja edelleen sinilauseella (tai kosinilauseella) kysytty etäisyys.
Kosinilausetta käyttäen merkitään kysyttyä etäisyyttä x, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö $3{,}6^2 = x^2 + 6{,}7^2 - 2 \cdot x \cdot 6{,}7 \cdot \cos 18°$.)

322. 8 (Olkoon kolmion korkeus h. Kolmion kylki on tällöin $\sqrt{h^2 + 6^2}$. Piirretään keskipisteestä normaalit kolmion kyljille.
Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö
$\frac{\sqrt{h^2 + 6^2}}{h - 3} = \frac{6}{3}$ eli $\frac{\sqrt{h^2 + 6^2}}{h - 3} = 2$.)

323. $\frac{4 - \pi}{(3 + 2\sqrt{2})\pi} \approx 0{,}047$ (Väliin jäävän alueen pinta-ala on $4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$.
Ulkopuolelle piirretyn ympyrän säde on
$r\sqrt{2} + r = (\sqrt{2} + 1)r$ ja pinta-ala
$\pi(\sqrt{2} + 1)^2 r^2 = \pi(3 + 2\sqrt{2})r^2$.)

324. 0,13 m/s ja 1,1 m/s (t sekunnin kuluttua yläpää on korkeudella $h(t) = \sqrt{64 - t^2}$. Lasketaan $h'(1)$ ja $h'(6)$, missä $h'(t) = -\frac{t}{\sqrt{64 - t^2}}$.)

325. 16 pylvästä, 28,1 % pitempi (Piirretään r-säteisen ympyrän keskipisteestä tangentit yhdelle ulkopuolelta sivuavalle $\frac{r}{4}$-säteiselle ympyrälle. Tangenttien väliselle kulmalle α on $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$, josta $\alpha \approx 23{,}07°$. Koska $\frac{360°}{\alpha} \approx 15{,}6$, tarvitaan vähintään 16 pylvästä.
Piirretään edelleen r-säteisen ympyrän keskipisteestä tangentit yhdelle 16:sta ympäröivässä kehässä olevalle $\frac{r}{4}$-säteiselle ympyrälle.
Tangenttien välinen kulma on $\frac{360°}{16} = 22{,}5°$.
Pikkuympyrän keskipisteen etäisyys ison ympyrän keskipisteestä on
$\frac{r}{4} : \sin 11{,}25° \approx 1{,}281r$.)

326. a) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ (Olkoon x kolmannen sivun puolikkaan pituus, ja olkoon α mediaanin ja kolmannen sivun välinen kulma kolmiossa, jonka sivujen pituudet ovat x, $2x$ ja 1.
Tällöin $1^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos\alpha$.
Toisesta kolmiosta, jonka sivujen pituudet ovat x, $2x$ ja 2, saadaan
$2^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(180° - \alpha)$.
Käytetään tietoa $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ ja eliminoidaan $\cos\alpha$ laskemalla yhtälöt yhteen.)

b) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \approx 1{,}28$ (Kulman puolittaja jakaa sivun viereisten sivujen suhteessa eli osiin, joiden pituudet ovat x ja $2x$.
Toisesta muodostuvasta kolmiosta saadaan
$1^2 = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos\alpha$ ja toisesta
$2^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos(180° - \alpha)$.
Käytetään tietoa $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ ja eliminoidaan $\cos\alpha$.)

327. Puolittaja jakaa kolmion OAB kahdeksi kolmioksi, joiden pinta-alat ovat
$\frac{1}{2}af\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}af$ ja $\frac{\sqrt{3}}{4}bf$.
Koko kolmion pinta-ala on
$\frac{1}{2}ab\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$.
Yhtälö $\frac{\sqrt{3}}{4}af + \frac{\sqrt{3}}{4}bf = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$ eli
yhtälö $af + bf = ab$ jaetaan tulolla abf.
Piirretään piste O kärkenä 60°:n kulma ja erotetaan kulman kyljiltä janat $OA = 6{,}7$ cm ja $OF = 2{,}9$ cm. Piirretään OF kylkenä toinen 60°:n kulma ja merkitään tämän kulman toisen kyljen ja janan AF jatkeen leikkauspistettä B. Tällöin $OB = b$. Kuviosta mitaten saadaan $b \approx 5$ cm.

328. 79 % (Olkoon neliön sivun pituus a. Alue, jolla lammas pystyy syömään, muodostuu kahdesta yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta ja ympyräsektorista. Olkoon x köyden kiinnityspisteessä oleva suorakulmaisen kolmion kulma radiaaneina $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4})$.

Tällöin alueen pinta-ala on

$$a^2 \tan x + \frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{2\pi} \cdot \pi\left(\frac{a}{\cos x}\right)^2.$$

Tulee siis olla

$a^2 \tan x + (\frac{\pi}{4} - x)\frac{a^2}{\cos^2 x} = 0{,}9a^2$ eli

$\tan x + (\frac{\pi}{4} - x)\frac{1}{\cos^2 x} - 0{,}9 = 0$. Haarukoimalla löydetään juuren likiarvo $x_0 \approx 0{,}4582$.

Kysytty suhde on $\frac{a}{\cos x_0} : \sqrt{2}\,a \approx 0{,}79$.

Haarukoinnin aloitusarvo kannattaa katsoa kuvaajasta.)

329. Seuraavassa puolisuunnikas on $ABCD$, missä $AB = a$ ja $CD = b$ ovat yhdensuuntaiset sivut, $BC = c$ ja $AD = d$ kaksi muuta sivua, $AC = e$ ja $BD = f$ lävistäjät ja lisäksi $\sphericalangle BAC = \alpha$ ja $\sphericalangle ABD = \beta$. On osoitettava, että $e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.
Kosinilauseella saadaan neljä yhtälöä:
$c^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos\alpha$,
$d^2 = b^2 + e^2 - 2be\cos\alpha$,
$c^2 = b^2 + f^2 - 2bf\cos\beta$ ja
$d^2 = a^2 + f^2 - 2af\cos\beta$.
Lasketaan yhtälöt yhteen ja päätellään kuviosta, että $e\cos\alpha + f\cos\beta = a + b$.
Tällöin on tutkittava erikseen tapaukset, joissa jompikumpi kulmista α tai β on tylppä, jolloin tarvitaan kosinin ominaisuutta $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Avaruusgeometria

330. 79 cm (särmiön avaruuslävistäjän pituus)

331. a) 48° ($\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; voidaan myös laskea avaruuslävistäjän pituus 3 ja määrittää kulma sinin tai kosinin avulla.)

b) 19° ($\tan\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$)

c) 42° ($\tan\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$)

d) 27° ($\tan\delta = \frac{1}{2}$)

Kulmat voidaan laskea myös vektorien avulla sijoittamalla suorakulmainen särmiö koordinaatistoon niin, että yksi kärki on origossa ja siitä lähtevät särmät koordinaattiakseleilla. Särmät ja edelleen lävistäjät ym. voidaan ilmaista kantavektorien $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ avulla, jolloin kulmat voidaan laskea pistetulon avulla.

332. a) 72,5° (Lasketaan vaippakolmion korkeus $\sqrt{10}\,a$, jolloin kulman tangentti on $\frac{\sqrt{10}}{1}$.)

b) 35,1° (Kulman puolikkaan tangentti on $\frac{1}{\sqrt{10}}$.)

c) 50,5° (Lasketaan pohjan lävistäjän puolikkaan pituus $\sqrt{2}\,a$, jolloin kulman puolikkaan tangentti on $\frac{\sqrt{2}}{3}$.)

d) 64,8° (Kulman tangentti on $\frac{3}{\sqrt{2}}$.)

e) 36,9° (Kulman puolikkaan tangentti on $\frac{1}{3}$.)

f) 71,6° (Kulman tangentti on $\frac{3}{1}$.)

333. 70,5° (Muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kannalle piirretty korkeus on kuution särmän pituus a ja kanta tahkon lävistäjä $a\sqrt{2}$.)

334. 17 cm (Vesi muodostaa suoran ympyrälieriön, jonka tilavuus on $5{,}0\ \text{dm}^3$ ja korkeus 2,2 dm. Lieriön pohjan säde r (dm) ratkaistaan yhtälöstä $\pi r^2 \cdot 2{,}2 = 5{,}0$.)

335. $190\ \text{cm}^2$ ($1\ \text{cl} = 0{,}01\ \text{l} = 0{,}01\ \text{dm}^3 = 10\ \text{cm}^3$. Olkoon pohjan säde r (cm), jolloin $\pi r^2 \cdot 3r = 200$. Siis $r = \sqrt[3]{\frac{200}{3\pi}} \approx 2{,}769$ (cm). Pellin tarve on $2\pi r \cdot 3r + 2\pi r^2 = 8\pi r^2$.)

336. 3,2 cm ja 4,0 cm ($1\ \text{dl} = 0{,}1\ \text{l} = 100\ \text{cm}^3$. Pienemmän pallon tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot 400\ (\text{cm}^3)$ ja suuremman $\frac{2}{3} \cdot 400\ (\text{cm}^3)$.)

337. korkeus 2,0 m ja tilavuus $6{,}0\ \text{m}^3$ (Olkoon x (m) tahkokolmion korkeus. Yhtälöstä $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x = 15$ saadaan $x = 2{,}5$ (m). Teltan korkeus on $h = \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}5^2}$ ja tilavuus $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}0^2 \cdot h$.)

338. 60° (Jos r on pohjaympyrän säde ja s kartion sivujana, niin $\pi rs = 2\pi r^2$, joten $s = 2r$. Kysytylle kulmalle α on $\cos\alpha = \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$.)

339. 3,6 cl (Neste muodostaa pikarin kanssa yhdenmuotoisen kartion. Jos V on nesteen tilavuus, niin $\frac{V}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.)

340. 11,9 cm ja 3,1 cm (Jos x on leikkauspinnan etäisyys huipusta, niin $\left(\frac{x}{15{,}0}\right)^3 = \frac{1}{2}$ eli $x = 15{,}0 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.)

341. 62 cm (Leikataan kappaleet tasolla, joka sisältää lieriön akselin. Pythagoraan lauseella saadaan $x^2 + 60^2 = 86^2$.)

342. $5\frac{1}{3}$ (Leikataan pyramidi tasolla, joka sisältää kahden vastakkaisen tahkokolmion korkeusjanat. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{16 - h}{16} = \frac{8}{12}$.)

343. $\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$ (Olkoon kuution särmä a. Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetteina ovat kuution tahkon lävistäjän puolikas ja kuution särmä ja jonka hypotenuusa on r, saadaan $a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = r^2$.)

344. $2{,}0\ \text{dm}^3$ (Ympyräkartion pohjaympyrän kehä on $\frac{240°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 18 = 24\pi$ (cm) ja säde $r = \frac{24\pi}{2\pi} = 12$ (cm). Ympyräkartion korkeus on $h = \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{180}$ (cm).)

345. 67,4° (Merkitään pyramidin pohjasärmän pituutta $2a$. Kolmiosta, jonka kärjet ovat pyramidin huipussa, pohjasärmän keskipisteessä ja pohjan keskipisteessä, saadaan $\cos\alpha = a : \frac{a}{\tan 21°}$ eli $\cos\alpha = \tan 21°$.)

346. 2,08-kertainen, 30,7 % vähemmän (Olkoot a_1 ja a_2 jotkin vastinjanat (esimerkiksi korkeudet) pienemmässä ja isommassa pullossa. Koska tilavuuksien suhde on vastinjanojen suhteen kuutio, niin $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 = 3$ eli $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt[3]{3}$. Pinta-alojen suhde on $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \approx (\sqrt[3]{3})^2 \approx 2{,}08$.
Olkoon a 1 litran pullon muovimäärä. Tällöin muovimäärät litraa kohden ovat a ja $\frac{(\sqrt[3]{3})^2}{3}a$, ja $\frac{(\sqrt[3]{3})^2}{3}a : a = \frac{(\sqrt[3]{3})^2}{3} \approx 0{,}693 = 69{,}3$ %.)

347. 8,8 cm (Olkoon d desilitran mitan pohjan halkaisija. Koska tilavuuksien suhde on vastinosien suhteen kuutio, niin $\left(\frac{d}{8{,}2}\right)^3 = \frac{1}{10}$ eli $d = 8{,}2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{10}} \approx 3{,}806$ (cm).

Desilitran mitan pohjan säde on $r = \frac{d}{2}$. Korkeus h (cm) saadaan yhtälöstä $\pi r^2 h = 100$.)

348. 63,4° (Merkitään kuution särmää a. Saadaan kolmio, jossa särmän keskipisteestä lähtevät sivut ovat $\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $\frac{3}{2}a$ ja $a\sqrt{2}$.

Kulman suuruus ratkaistaan kosinilauseella. Kulma voidaan laskea myös vektorien avulla niin, että valitaan yksikkövektoreiksi $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ kuution särmävektorit, ilmaistaan niiden avulla kolmion sivuvektorit ja lasketaan kulman kosini pistetulon avulla.)

349. $\frac{9}{16\pi} \approx 17{,}9\ \%$ (Pythagoraan lauseella saadaan pyramidin pohjaneliön lävistäjän puolikas $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, joten lävistäjä on $\sqrt{3}\,r$ ja pyramidin pohjaneliön sivu $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}r$. Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}r\right)^2 \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3}{4}r^3$.)

350. a) 41,4° (Merkitään kolmion sivujen pituutta a. Tällöin kolmiossa BAC on $AB = AC = a$ ja $BC = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.)

b) 67,8° (Olkoon M janan BC keskipiste. Kolmiossa AMP on $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ja $PM = \frac{a}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}a$. Kysytylle kulmalle α on $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.)

c) 22,2° (b-kohdan kulma vähennetään 90°:sta.)

351. 1,2 % (Maalikerroksen tilavuus on kerrosta ulko- ja sisäpuolelta rajoittavien lieriöiden tilavuuksien erotus. Sisäpuolisen kerroksen tilavuus on
$V_S = \pi \cdot 4{,}95^2 \cdot 50 - \pi \cdot 4{,}94^2 \cdot 50$ (cm^2)
ja ulkopuolisen kerroksen
$V_U = \pi \cdot 5{,}01^2 \cdot 50 - \pi \cdot 5{,}00^2 \cdot 50$ (cm^2).)

352. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12(\sqrt{3}-1)} \approx 0{,}62$ (Olkoon pohjaympyrän säde r, jolloin kuution särmä on $2r$. Vastakkaisen leikkausympyrän ala on kolmasosa pohjaympyrän pinta-alasta, joten leikkausympyrän säde on $\frac{1}{\sqrt{3}}r$. Kartion korkeus h saadaan yhdenmuotoisista kolmioista:
$\frac{h-2r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}r : r$, josta $h = \frac{2\sqrt{3}r}{\sqrt{3}-1}$.
Kartion tilavuus on $V_1 = \frac{2\pi(\sqrt{3})r^3}{3(\sqrt{3}-1)}$ ja kuution $V_2 = 8r^3$.)

353. Teki. (Sivun pituus tarkoittaa lieriön korkeutta (makaavan lieriön pituutta). Lieriön tilavuus on 200 dm^3. Yhtälöstä $\pi r^2 \cdot 11{,}2 = 200$ saadaan pohjaympyrän säde $r \approx 2{,}384$ (dm). Öljy muodostaa lieriön, jonka pohja on pohjaympyrän 3,2 dm korkea segmentti ja korkeus $h = 11{,}2$ dm. Segmentti on suurempi kuin puoliympyrä, joten sen pinta-ala saadaan lisäämällä segmentin kaaren määräämän sektorin (keskuskulma yli 180°) pinta-alaan tasakylkisen kolmion pinta-ala (voidaan myös laskea ensin tyhjää tilaa vastaava pienempi segmentti). Jänteen etäisyys keskipisteestä on $3{,}2 - r$, joten sektorin keskuskulma on $360° - 2\alpha$, missä $\cos\alpha = \frac{3{,}2-r}{r}$. Segmentin pinta-ala on
$A = \frac{360° - 2\alpha}{360°}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha \approx 12{,}74$ (dm^3).
Öljyn tilavuus on $V = Ah \approx 143$ dm^3 ja arvo $143 \cdot 4{,}67$ mk ≈ 670 mk. Tynnyrin ja polttoaineen yhteisarvo on noin 770 mk, joten kauppa kannatti.)

354. napa-alueet 8,3 %, trooppinen alue 39,9 %
(Ratkaisussa ei tarvita maapallon säteen suuruutta. Napa-alueet ovat yhtä suuria pallokalotteja. Olkoon h yhden kalotin korkeus ja r maapallon säde. Kalottien pinta-alan suhde maapallon pinta-alaan on $\frac{2 \cdot 2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{h}{r}$.
Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka muodostavat napapiirille ja napapiirin keskipisteen kautta kulkevat maapallon säteet ja napapiirin säde, saadaan $r - h = r \cos 23{,}5°$, joten
$h = r - r \cos 23{,}5° = r(1 - \cos 23{,}5°)$ ja
$\frac{h}{r} = 1 - \cos 23{,}5° \approx 0{,}083 = 8{,}3\ \%$.
Vastaavasti trooppisten alueiden ulkopuolelle jäävien kalottien pinta-alan suhde maapallon pinta-alaan on $1 - \cos 66{,}5° \approx 0{,}601 = 60{,}1\ \%$, joten trooppinen alue on 39,9 % maapallon pinta-alasta. Trooppisen alueen pinta-ala saadaan myös taulukkokirjassa olevalla pallovyöhykkeen kaavalla.)

355. leveyspiiriä pitkin 2 770 km, lyhin etäisyys 2 740 km (Olkoon $R = \frac{40\,000}{2\pi}$ (km) maapallon säde. Etäisyys pitkin leveyspiiriä on 49. leveyspiirin kaaren pituus. Leveyspiirin säde on $r = R \cos 49°$ $(= R \sin 51°)$ ja etäisyys
$\frac{38°}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{38°}{360°} \cdot 2\pi \cdot R \cos 49°$
$= \frac{38°}{360°} \cdot 40\,000 \cos 49° \approx 2\,770$ (km).
Lyhin etäisyys on paikkakuntien kautta kulkevan isoympyrän kaaren pituus. Kaaren keskuskulman laskemiseksi lasketaan paikkakuntia yhdistävän jänteen puolikkaan pituus.
Jänne on 49. leveyspiirin 38°:n keskuskulmaa vastaava jänne, joten jänteen puolikas on
$a = r \sin 19° = R \cos 49° \cdot \sin 19°$.
Isoympyrän kaaren keskuskulman α puolikkaalle on $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{R} = \cos 49° \cdot \sin 19°$,
josta $\alpha \approx 24{,}666°$. Lyhin etäisyys on
$\frac{\alpha}{360°} \cdot 40\,000 \approx 2\,740$ (km).)

356. $\frac{16}{(1+\sqrt{5})^3} \approx 0{,}47$ (Leikataan kappaleet tasolla, joka sisältää kartion akselin.
Kartion korkeus on $2R$ ja sivujana $R\sqrt{5}$.
Jos r on pallon säde, niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{r}{2R - r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, joten
$r = \frac{2}{1+\sqrt{5}} R$. Pallon tilavuus on
$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^3 R^3 = \frac{32}{3(1+\sqrt{5})^3}\pi R^3$ ja
kartion tilavuus $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R^3$.)

357. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}12$ (Oletetaan, että neljä r-säteistä palloa sivuavat toisiaan niin, että keskipisteet muodostavat neliön. Jos pallojen väliin asetetaan viides r-säteinen pallo, niin pallojen keskipisteet muodostavat säännöllisen nelisivuisen pyramidin, jonka pohjaneliön sivun pituus ja sivusärmän pituus on $2r$. Pyramidin korkeudeksi lasketaan $r\sqrt{2}$. Tehtävässä muodostetun pallopyramidin korkeus on
$r + r\sqrt{2} + r\sqrt{2} + r\sqrt{2} + r = (2 + 3\sqrt{2})r$.)

358. a) 9,6 cm/s b) 1,3 cm/s (Kun astiassa olevan veden tilavuus on V, niin vesikerroksen korkeus saadaan yhtälöstä $\frac{1}{3}h^3 = V$ eli
$h = \sqrt[3]{3V}$. t sekunnin kuluttua vesimäärä on $2t$ (dm^3) ja vesikerroksen korkeus
$h(t) = \sqrt[3]{6t} = 6^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}$ (dm).
Lasketaan $h'(0{,}5)$ ja $h'(10)$, missä
$h'(t) = \frac{1}{3}\, 6^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}}$.)

359. 97,2° (Olkoon pohjaneliö $ABCD$ ja pyramidin huippu P. Merkitään pohjasärmän pituutta $2a$. Piirretään kärjistä A ja C särmälle PB normaalit AR ja CR, jolloin tahkojen välinen kulma on kulma ARC. Lasketaan janan AR pituus x, minkä jälkeen kulma ARC voidaan ratkaista tasakylkisestä kolmiosta, jonka kanta on pohjan lävistäjä $AC = 2\sqrt{2}\,a$. Jos M on pohjasärmän AB keskipiste, niin kolmio ARB on yhdenmuotoinen kolmion PMB kanssa (suora kulma ja yhteinen kulma, kk). Kolmiossa PMB on $PB = 3a$ ja $PM = \sqrt{8}\,a$, joten $\frac{x}{2a} = \frac{\sqrt{8}a}{3a}$ ja $x = \frac{2\sqrt{8}}{3}a$.)

360. a) 15,8° (Kulma lasketaan kosinilauseella kolmiosta ASM, missä M on janan PQ keskipiste. Kolmiossa on $AS = 1$, $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (kolmion ABC korkeus) ja $SM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (tasasivuisen kolmion PQS korkeus).)
b) 70,5° (Tahkojen välinen kulma on kärjistä P ja Q särmälle AS piirrettyjen normaalien PR ja QR välinen kulma eli tasakylkisen kolmion PRQ huippukulma R.
Kolmion SPR kulma S on 60°, joten $QR = PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Kolmion PRQ kanta on $\frac{1}{3}$.)

c) $\frac{\sqrt{2}}{108}$ (Tulkitaan monitahokas kartioksi, jonka pohja on tahko APS. Pohjan pinta-ala on kolmasosa alkuperäisen tasasivuisen kolmion ABC pinta-alasta $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, sillä kanta PS on kolmasosa kannasta AC ja korkeus on sama. Pisteestä Q b-kohdan janalle PR piirretty normaali on kohtisuorassa tasoa APS vastaan, sillä se on kohtisuorassa kahta tason APS erisuuntaista suoraa AS ja PR vastaan. Siis kartion korkeus on tasakylkisen kolmion PRQ kannan päätepisteestä kyljelle piirretty korkeus h.
Korkeus voidaan määrittää yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, jolloin saadaan $h = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ ja $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.)

361. Tilavuus: Olkoot $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ kolmion sivut ja näille sivuille piirretyt korkeudet vastaavasti h_1, h_2 ja h_3.
Pyörähdyskappaleiden tilavuudet ovat

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi h_1^2 a_1,\ V_2 = \frac{1}{3}\pi h_2^2 a_2 \text{ ja}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi h_3^2 a_3.$$

Huomataan, että $h_1a_1 = h_2a_2 = h_3a_3 = 2A$, missä A on kolmion pinta-ala. Siis

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\frac{(2A)^2}{a_1},\ V_2 = \frac{\pi}{3}\frac{(2A)^2}{a_2} \text{ ja } V_3 = \frac{\pi}{3}\frac{(2A)^2}{a_3},$$

joten $V_1 \geqslant V_2 \geqslant V_3$.
Pinta-ala: Pyörähdyskappaleiden pinta-alat ovat $A_1 = \pi h_1(a_2 + a_3)$, $A_2 = \pi h_2(a_1 + a_3)$ ja $A_3 = \pi h_3(a_1 + a_2)$. Olkoon kolmion piiri p ja pinta-ala A. Tällöin $A_1 = \pi h_1(p - a_1)$

$$= \pi(ph_1 - a_1h_1) = \pi(p\frac{2A}{a_1} - 2A),$$

$$A_2 = \pi(p\frac{2A}{a_2} - 2A) \text{ ja } A_3 = \pi(p\frac{2A}{a_3} - 2A),$$

joten $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3$.

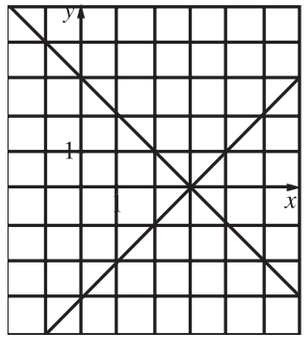
Analyyttinen geometria

362. a) 10

b) $\sqrt{89} \approx 9{,}4$

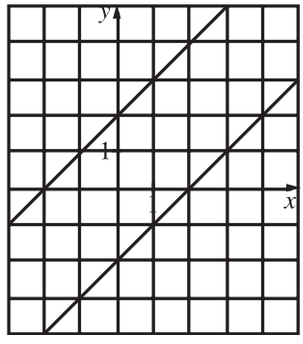
(Sivun BC keskipiste on $(6, 1)$.)

363. a) kahta toisensa leikkaavaa suoraa



($y = x - 3$ tai $y = -x + 3$)

b) kahta yhdensuuntaista suoraa



($(x - y)^2 = 4$ eli $x - y = 2$ tai $x - y = -2$ eli $y = x - 2$ tai $y = x + 2$)

364. a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 = 5$

365. a) On. (Pisteen koordinaatit $x = -1$ ja $y = -3$ toteuttavat yhtälön.)

b) keskipiste $(3, -2)$ ja säde $\sqrt{17}$

366. $5 - 2\sqrt{2} \approx 2{,}17$ (Lasketaan etäisyys keskipisteestä ja vähennetään säde.)

367. a) Ympyrää, jonka keskipiste on $(2, -3)$ ja säde $\sqrt{5}$. $((x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5)$

b) pistettä $(-\frac{1}{2}, 1)$ $((x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 0)$

368. keskipiste $(-5, 0)$, säde 4, etäisyys 1
(Kun jaetaan 4:llä, yhtälö tulee muotoon $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$ ja neliöiksi täydentämällä muotoon $(x + 5)^2 + y^2 = 16$.)

369. $q < 52$ (Neliöiksi täydentämällä saadaan $(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 52 - q$. Tulee olla $52 - q > 0$.)

370. a) $(8, 0)$ ja $(2, 0)$ (Sijoitetaan $y = 0$.)
b) $(0, 4)$ (Sijoitetaan $x = 0$.)

371. a) $\frac{3}{2}$ b) -4
c) 0 d) ei kulmakerrointa

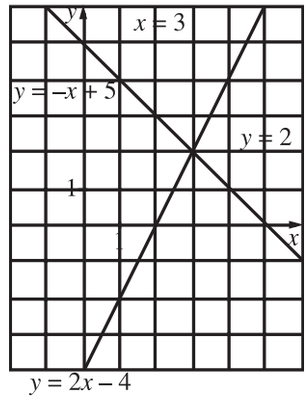
372. kulmakerroin $\frac{3}{2}$, suuntakulma $56{,}31°$

373. $60{,}3°$

$$(\tan\varphi = \left| \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{7}{6} : \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{4}.$$

Kulma voidaan laskea myös suorien suuntavektorien $3\bar{i} - 2\bar{j}$ ja $2\bar{i} + \bar{j}$ avulla. Suuntavektorit nähdään kulmakertoimista apukolmioita käyttäen.)

374. a) $y = 2$ b) $x = 3$
c) $y = -x + 5$ (Suoran kulmakerroin on -1.)
d) $y = 2x - 4$



375. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ eli $x + 3y + 10 = 0$

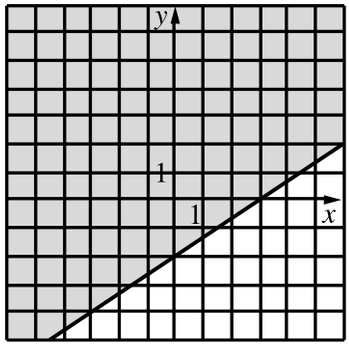
$(y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - (-4)))$

376. $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ eli $3x - 4y + 11 = 0$

$(y - 2 = \frac{3}{4}(x + 1)$.

Toinen tapa on määrittää sellainen C:n arvo, että pisteen $(-1, 2)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön $3x - 4y + C = 0$.)

377. Pisteet, jotka ovat suoralla $y = \frac{2}{3}x - 2$ tai sen yläpuolella.



378. $(-\frac{5}{2}, -3)$ (x-koordinaatti saadaan yhtälöstä $\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = x - \frac{1}{2}$. Kun yhtälö kerrotaan 6:lla, saadaan yhtälö $4x - 8 = 6x - 3$.)

379. $x = 4,\ y = -20$ (Yhtälöparista kannattaa ensin poistaa nimittäjät, jolloin se tulee muotoon $2x + y = -12,\ 6x + y = 4$.)

380. $(1, 2)$ ja $(-2, 1)$ (Ratkaistaan $x = 3y - 5$ ja sijoitetaan ympyrän yhtälöön.)

381. $(-1, 0)$ ja $(1, 2)$ (Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan -1:llä ja yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan yhtälö $-4x + 4y - 4 = 0$ eli $y = x + 1$. Lauseke $x + 1$ sijoitetaan y:n paikalle jälkimmäiseen yhtälöön. y-koordinaatit lasketaan sijoittamalla saadut x:n arvot yhtälöön $y = x + 1$. Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä ympyrät.)

382. $x = \frac{7}{4},\ y = -\frac{1}{4}$ (Ratkaistaan esimerkiksi $x = y + 2$ ja sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön. Voidaan myös huomata, että $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, ja ratkaista yhtälöpari $x - y = 2,\ x + y = \frac{3}{2}$.)

383. $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$ eli $4x - 3y + 10 = 0$

(Normaalin kulmakerroin on $\frac{4}{3}$ ja yhtälö $y - 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$.)

384. $a = 5$ (Suorien kulmakertoimet ovat $-\frac{a+1}{4}$ ja $\frac{2}{3}$.

Saadaan yhtälö $-\frac{a+1}{4} \cdot \frac{2}{3} = -1$.)

385. $y = -2x + 4$ eli $2x + y - 4 = 0$
(Tangentti on kohtisuorassa pisteeseen $(3, -2)$ piirrettyä sädettä vastaan. Säteen kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, joten tangentin kulmakerroin on -2.
Tangentin yhtälö on $y + 2 = -2(x - 3)$.)

386. $(\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$ (Piste on suoran $x + 3y = 1$ ja sille origosta piirretyn normaalin $y = 3x$ leikkauspiste.)

387. a) $\frac{8}{\sqrt{17}} \approx 1{,}9$

b) $\frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2{,}2$ (Suoran yhtälö saatetaan ensin muotoon $2x - 3y + 3 = 0$.)

388. $\frac{10}{\sqrt{5}} - 3 = 2\sqrt{5} - 3 \approx 1{,}5$ (Lasketaan keskipisteen $(-3, 4)$ etäisyys suorasta ja vähennetään ympyrän säde.)

389. Ympyrän keskipiste on $(1, 0)$ ja säde $\sqrt{10}$.
Keskipisteen $(1, 0)$ etäisyys suorasta $x + 3y - 11 = 0$ on $\frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.
Koska suoran etäisyys keskipisteestä on yhtä suuri kuin ympyrän säde, suora on ympyrän tangentti.
Toinen tapa on ratkaista suoran ja ympyrän leikkauspisteet ja havaita toisen asteen yhtälön diskriminantista, että suoralla ja ympyrällä on vain yksi yhteinen piste.

390. $(10, 0)$, $(0, 5)$ ja $(0, -2)$

391. $(-3, 4)$ ja $(-2, 1)$ (x-koordinaatit saadaan yhtälöllä $x^2 + 2x + 1 = -3x - 5$.)

392. a) alaspäin aukeavaa paraabelia
b) suoraa c) ympyrää
d) vasemmalle aukeavaa paraabelia

393. $a > \frac{1}{2}$ (Yhtälön $x + a = -\frac{1}{2}x^2$ diskriminantin tulee olla negatiivinen.)

394. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{5}$ (Ympyrän säde $\frac{3}{\sqrt{5}}$ on pisteen $(2, 3)$ etäisyys suorasta $2x - y + 2 = 0$.)

395. $(\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$ (Kyseisen suoran $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ ja sille origosta piirretyn normaalin $y = \frac{3}{5}x$ leikkauspiste.)

396. $120°$ (Yhtälö on $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$, joten ympyrän keskipiste on $(3, -2)$ ja säde 4.
Kolmio BAC on tasakylkinen kolmio, jonka kylkien pituus on 4 ja korkeus 2.
Jos α on huippukulman BAC puolikas, niin $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, joten $\alpha = 60°$.)

397. suorat $y = 2\sqrt{2}x$ ja $y = -2\sqrt{2}x$
(Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2 + y^2}$ ja y-akselista $|x|$. Yhtälö $\sqrt{x^2 + y^2} = 3|x|$ on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön $x^2 + y^2 = 9x^2$ kanssa.)

398. enintään $4{,}40$ m korkea
(Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon. Jos paraabeli sijoitetaan niin, että sen huippu on y-akselilla pisteessä $(0; 7{,}50)$ ja se leikkaa x-akselin pisteissä $(4{,}05; 0)$ ja $(-4{,}05; 0)$, paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + 7{,}50$.
Sijoittamalla $x = 4{,}05$ ja $y = 0$ saadaan $a = -\frac{7{,}50}{4{,}05^2} \approx -0{,}4572$.
Etäisyydellä $2{,}60$ m keskiviivasta on $y = -0{,}4572 \cdot 2{,}60^2 + 7{,}50 \approx 4{,}409$.)

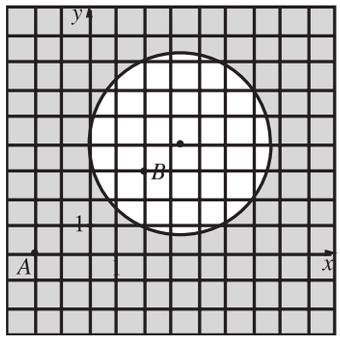
399. $(-3, -2)$ tai $(-2, 3)$ (Voidaan sijoittaa pisteiden $(0, 0)$ ja $(-5, 1)$ koordinaatit ympyrän yhtälöön $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 13$ ja ratkaista yhtälöparista keskipisteen koordinaatit a ja b. Yhtälöpari on teknisesti samanlainen kuin ratkaistaessa kahden ympyrän leikkauspistettä. Voidaan myös määrittää yhtälön avulla pisteitä $(0, 0)$ ja $(-5, 1)$ yhdistävän janan keskinormaalin $y = 5x + 13$ piste $(x, 5x + 13)$, jonka etäisyys origosta on $\sqrt{13}$.)

400. Joukon muodostavat ympyrän

$(x - \frac{10}{3})^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$ kehällä ja

ympyrän ulkopuolella olevat pisteet.

Ympyrän keskipiste on $(\frac{10}{3}, 4)$ ja säde $\frac{10}{3}$.



(Vektorin $\overline{AP}$ pituus $|\overline{AP}|$ on sama kuin janan AP pituus, ja vektorin $\overline{BP}$ pituus $|\overline{BP}|$ on sama kuin janan BP pituus. Pisteen $P(x, y)$ koordinaattien on toteutettava ehto

$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leqslant 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$ eli

$(x+2)^2 + y^2 \leqslant 4((x-2)^2 + (y-3)^2)$ eli

$3x^2 + 3y^2 - 20x - 24y + 48 \geqslant 0$ eli

$x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 8y + 16 \geqslant 0.$

Täydentämällä neliöiksi saadaan yhtälö

$(x - \frac{10}{3})^2 + (y - 4)^2 \geqslant \left(\frac{10}{3}\right)^2$.)

401. (1, 8)

(Tapa 1. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Määritetään sivun PQ keskinormaalin $y = x + 7$ ja sivun QR keskinormaalin $y = -2x + 10$ leikkauspiste.

Tapa 2. Ympyrän keskipiste (a, b) on yhtä etäällä jokaisesta pisteestä P, Q ja R. Muodostetaan etäisyyksien neliöistä yhtälöpari

$(a+6)^2 + (b-9)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2$ ja

$(a-2)^2 + (b-1)^2 = (a-6)^2 + (b-3)^2$.

Tapa 3. Ympyrän yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Sijoitetaan pisteiden P, Q ja R koordinaatit, ratkaistaan yhtälöryhmästä A, B ja C ja saatetaan yhtälö keskipistemuotoon.)

402. $\frac{2}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}62$ (Piste on kahden suoran välisen kulman puolittajalla, jos ja vain jos se on yhtä etäällä kulman kyljistä.

Pisteen (x, y) etäisyys x-akselista on $|y|$ ja etäisyys suorasta $2x + y = 0$ on $\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}$.

Yhtälö $|y| = \frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}$ eli yhtälö

$\sqrt{5}\,|y| = |2x + y|$ toteutuu, kun

$\sqrt{5}\,y = 2x + y$ tai $\sqrt{5}\,y = -(2x + y)$.

Saadaan kulman puolittajien yhtälöt

$y = \frac{2}{\sqrt{5}-1}x$ ja $y = -\frac{2}{\sqrt{5}+1}x$.

Kuviosta nähdään, että tylpän kulman puolittajan tulee olla nouseva.)

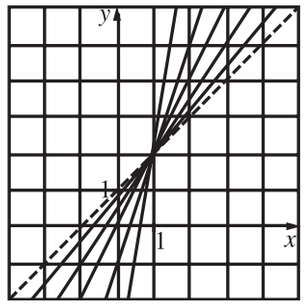
403. $(-1, -3)$ ja $(2\frac{1}{3}, 7)$ (Merkitään suoran pistettä $(x, 3x)$ ja ratkaistaan yhtälö

$\frac{|3x - 4 \cdot 3x + 6|}{5} = 3.$

Toinen tapa on määrittää yhtälöstä

$\frac{|3x - 4y + 6|}{5} = 3$ suorat, joiden etäisyys suorasta $3x - 4y + 6 = 0$ on 3, ja ratkaista, missä pisteissä ne leikkaavat suoran $3x - y = 0$.)

404. Yhteinen piste on $(1, 2)$.

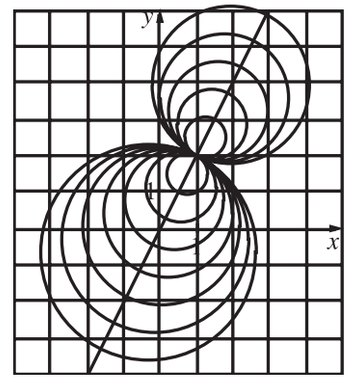


(Vakion C arvoja $C = 0$ ja $C = 1$ vastaavien suorien $x - 1 = 0$ ja $2x - y = 0$ leikkauspiste on $(1, 2)$. Koska $(C^2 + 1) \cdot 1 - C^2 \cdot 2 + C^2 - 1 = C^2 + 1 - 2C^2 + C^2 - 1 = 0$, kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(1, 2)$ kautta.
Kun $C = 0$, suora
$(C^2 + 1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$
on y-akselin suuntainen suora $x - 1 = 0$.
Kun $C \neq 0$, suoran kulmakerroin on

$$\frac{C^2 + 1}{C^2} = 1 + \frac{1}{C^2}.$$

Lausekkeen $1 + \frac{1}{C^2}$ kaikki arvot ovat suurempia kuin 1 ja toisaalta lauseke saa kaikki lukua 1 suuremmat arvot.
Suoraparvi muodostuu suorasta $x = 1$ ja pisteen $(1, 2)$ kautta kulkevista suorista, joiden kulmakerroin on suurempi kuin 1.)

405. Yhteinen piste on $(1, 2)$.



(Yhtälö $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 5 - 10a$ saadaan neliöiksi täydentämällä muotoon
$(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 5 - 10a + 5a^2$ eli muotoon $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 5(1 - a)^2$.
Lausekkeen $5(1 - a)^2$ arvot ovat positiivisia, kun $a \neq 1$, joten yhtälö on ympyrän yhtälö, kun $a \neq 1$.
a:n arvoja 0 ja -1 vastaavilla ympyröillä $x^2 + y^2 = 5$ ja $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 15$ on yksi leikkauspiste $(1, 2)$.
Osoitetaan, että pisteen $(1, 2)$ koordinaatit toteuttavat ympyräparven yhtälön.
Ympyrän $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 5(1 - a)^2$ keskipisteen koordinaatit ovat $x = a$ ja $y = 2a$, joten koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = 2x$.
Parvi muodostuu ympyröistä, joiden keskipiste on suoralla $y = 2x$ ja jotka kulkevat pisteen $(1, 2)$ kautta.)

406. paraabelin $y = 2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

(Olkoon (x, y) kuminauhan keskipiste. Koska toinen päätepiste on origo, niin toinen päätepiste on $(2x, 2y)$. Päätepiste on paraabelilla $y = (x - 3)^2$, joten $2y = (2x - 3)^2$.)

407. Kaikki leikkaavat pisteessä $(0, 1)$.
Origon kautta kulkevat kohtisuorat $y = kx$ ja $y = -\frac{1}{k}x$ leikkaavat paraabelin pisteissä (k, k^2) ja $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$. Leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$(k^2 - \frac{1}{k^2}) : (k + \frac{1}{k}) = \frac{k^4 - 1}{k^2} \cdot \frac{k}{k^2 + 1} = \frac{k^2 - 1}{k}$$

ja yhtälö $y - k^2 = \frac{k^2 - 1}{k}(x - k)$.
Kun sijoitetaan $x = 0$, saadaan $y = 1$.

408. $(2, 3)$ tai $(-\frac{2}{9}, \frac{7}{9})$ (Keskipiste on yhtä etäällä pisteistä $(3, 1)$ ja $(0, 4)$, joten se on pisteitä yhdistävän janan keskinormaalilla $y = x + 1$. Ratkaistaan keskinormaalin piste $(x, x + 1)$, joka on yhtä etäällä pisteestä $(0, 4)$ ja suorasta $2x - y - 6 = 0$. Yhtälö $\sqrt{x^2 + (x - 3)^2} = \frac{|2x - (x + 1) - 6|}{\sqrt{5}}$ toteutuu, kun $x = 2$ tai $x = -\frac{2}{9}$.)

409. Ei yhtään ratkaisua, kun $|a| > \sqrt{2}$, kaksi ratkaisua, kun $|a| = \sqrt{2}$, kolme ratkaisua, kun $|a| = 1$, ja neljä ratkaisua, kun $0 \leq |a| < 1$ tai $1 < |a| < \sqrt{2}$.
(Analyyttisen geometrian menetelmillä: Yhtälö $x^2 = y^2$ esittää suoria $y = x$ ja $y = -x$. Ympyrän $(x - a)^2 + y^2 = 1$ säde on 1 ja keskipisteen $(a, 0)$ etäisyys kummastakin suorasta on $\frac{|a|}{\sqrt{2}}$.
Leikkauspisteitä ei ole yhtään, kun $\frac{|a|}{\sqrt{2}} > 1$, kaksi, kun $\frac{|a|}{\sqrt{2}} = 1$, ja kolme tai neljä, kun $\frac{|a|}{\sqrt{2}} < 1$. Tällöin ratkaisuja on kolme, kun ympyrä kulkee origon kautta ($|a| = 1$), ja muulloin neljä.

Algebrallisesti: Jälkimmäiseen yhtälöön sijoitetaan $y^2 = x^2$ ja saadaan toisen asteen yhtälö $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$, jonka diskriminantti on $D = -4a^2 + 8$.
Juuria ei ole yhtään, kun $D < 0$.
Kun $D = 0$, yhtälöllä on juuri $x = 1$, jolloin yhtälöstä $y^2 = 1$ saadaan kaksi y:n arvoa.
Kun $D > 0$, yhtälöllä on kaksi juurta, joista molemmista saadaan kaksi y:n arvoa, paitsi silloin, kun toinen juuri on 0.)

410. a) paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (Olkoon (x, y) ympyrän keskipiste. Keskipiste on yhtä etäällä x-akselista ja pisteestä $(0, 1)$ eli $|y| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$.)

b) paraabelin $y = \frac{1}{4}x^2$ (Olkoon (x, y) halkaisijan toinen päätepiste. Pisteitä (x, y) ja $(0, 1)$ yhdistävän janan keskipiste $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}(y + 1))$ on a-kohdan käyrällä, joten $\frac{1}{2}(y + 1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)^2 + \frac{1}{2}$.)

411. Suoran $y = x - 1$, josta on poistettu piste $(1, 0)$.
(Jos $y = m_1x^2 - 2(m_1 - 1)x + m_1 - 2$ ja $y = m_2x^2 - 2(m_2 - 1)x + m_2 - 2$, missä $m_1 \neq m_2$, ovat kaksi parven paraabelia, niin leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan yhtälöllä $m_1x^2 - 2(m_1 - 1)x + m_1 - 2 = m_2x^2 - 2(m_2 - 1)x + m_2 - 2$. Yhtälö tulee muotoon $(m_1 - m_2)(x^2 - 2x + 1) = 0$, jonka ainoa juuri on $x = 1$. Kun $x = 1$, niin $y = m \cdot 1^2 - 2(m - 1) \cdot 1 + m - 2 = 0$. Siis kaikki parven paraabelit kulkevat pisteen $(1, 0)$ kautta ja paraabeleilla ei ole muita leikkauspisteitä.
Paraabelin $y = mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2$ huipun x-koordinaatti on $x = \frac{m - 1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$ ja y-koodinaatti $y = -\frac{1}{m}$ eli $x = 1 + y$.
Koska $-\frac{1}{m}$ saa kaikki reaaliarvot lukuunottamatta arvoa 0, huippupisteitä ovat kaikki suoran $x = 1 + y$ pisteet, paitsi piste $(1, 0)$.)

412. pienin arvo -1, suurin arvo 39
(Lauseke $x^2 + y^2 - 6x - 2y$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x-3)^2 + (y-1)^2 - 10$, jossa $(x-3)^2 + (y-1)^2$ on pisteen (x, y) pisteestä $(3, 1)$ lasketun etäisyyden neliö. Epäyhtälön $x^2 + (y-5)^2 \leqslant 4$ määräämä alue on ympyrän $x^2 + (y-5)^2 = 4$ kehä ja sisäpuoli. Ympyrän keskipiste on $(0, 5)$ ja säde 2. Pienin alueessa olevan pisteen etäisyys pisteestä $(3, 1)$ on $5 - 2 = 3$ ja suurin $5 + 2 = 7$, missä 5 on keskipisteen $(0, 5)$ etäisyys pisteestä $(3, 1)$.)

413. Suoritetaan perustelu sijoittamalla kuvio koordinaatistoon. Sijoitetaan piste A origoon ja pisteet B ja D koordinaattiakseleille, jolloin $B = (b, 0)$ ja $D = (0, d)$. Olkoon $C = (u, v)$.

Janan AC keskipiste on $(\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$, ja

janan BD keskipiste on $(\frac{b}{2}, \frac{d}{2})$.

Pisteiden B ja C kautta kulkevan suoran yhtälö on $y - 0 = \frac{v}{u-b}(x-b)$, joten suora leikkaa sivun AD jatkeen (y-akselin) pisteessä $E = (0, -\frac{vb}{u-b})$.

Pisteiden D ja C kautta kulkevan suoran yhtälö on $y - d = \frac{v-d}{u}(x-0)$, joten suora leikkaa sivun AB jatkeen (x-akselin) pisteessä $F = (-\frac{ud}{v-d}, 0)$.

Janan EF keskipiste on $(-\frac{ud}{2(v-d)}, -\frac{vb}{2(u-b)})$.

Lasketaan yhdestä keskipisteestä kahteen muuhun piirrettyjen janojen kulmakertoimet, jotka osoittautuvat yhtä suuriksi.

Vektorit

414. a) $40°$ b) $140°$ c) $100°$

415. a) 1 b) 7 c) 5

416. $\overline{x} = -\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{y} = \overline{b} - \overline{a}$

417. a) $-\overline{a} - \overline{b} + \overline{d}$ b) $2\overline{a} - \overline{d}$

418. a) $\overline{a}$ on samansuuntainen $\overline{b}$:n kanssa, ja $\overline{a}$:n pituus on 2 kertaa niin suuri kuin $\overline{b}$:n pituus. ($\overline{a} = 2\overline{b}$)
b) $\overline{a}$ on vastakkaissuuntainen $\overline{b}$:n kanssa, ja $\overline{a}$:n pituus on kaksi kolmasosaa $\overline{b}$:n pituudesta. ($\overline{a} = -\frac{2}{3}\overline{b}$)

419. a) $\overline{a}^0 = \frac{1}{5}\overline{a}$ b) $\frac{4}{5}\overline{a}$ c) $-\frac{7}{5}\overline{a}$

420. a) $2\overline{a} + \overline{b}$
($\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC} = -\overline{a} + \overline{b} + 3\overline{a}$)
b) $-\frac{8}{3}\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}$
($\overline{CP} = \overline{CD} + \frac{1}{3}\overline{DB} = -3\overline{a} + \frac{1}{3}(-\overline{b} + \overline{a})$)

421. a) $\overline{OP} = 4\overline{a} - 3\overline{b}$
($\overline{OP} = \overline{OA} - 3\overline{AB} = \overline{a} - 3(-\overline{a} + \overline{b})$)
b) $\overline{OP} = -2\overline{a} + 3\overline{b}$ ($\overline{OP} = \overline{OA} + 3\overline{AB}$)

422. $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = \overline{0}$

423. $\overline{a} = 7\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$ (Yhtälö $\overline{a} = s\overline{e}_1 + t\overline{e}_2$ johtaa yhtälöpariin $s + t = 2$, $s + 2t = -3$.)

424. a) Eivät ole. (Yhtälö $45 = 30t$ toteutuu, kun $t = \frac{3}{2}$. Luku ei toteuta yhtälöä $-75 = -40t$.)

b) Ovat. (Molemmat yhtälöt $\frac{4}{3} = -\frac{2}{5}t$ ja $-\frac{5}{6} = \frac{1}{4}t$ toteutuvat, kun $t = -\frac{10}{3}$.)

425. a) $k = -\frac{33}{2}$ (Tulee olla $k = 22t$ ja $-9 = 12t$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = -\frac{3}{4}$, jolloin $k = 22 \cdot (-\frac{3}{4})$.)

b) Ei millään.
(a-kohdassa saatiin $t = -\frac{3}{4} < 0$.)

c) $k = -\frac{33}{2}$

426. $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 11$

427. $A = (6, -7)$, $B = (30, -10)$ ja $C = (24, -3)$
(Koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, niin $\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{CA}$.
Edelleen $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$.)

428. pisteeseen (3, 1)
(Olkoon P piste, johon päädytään.
Koska
$\overline{BA} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$ ja $|\overline{BA}| = 10$, niin
$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{BA} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ ja
$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{i} - 3\vec{j}$.)

429. $\overline{AB} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $|\overline{AB}| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1$

430. (27, –39, 41) (Kysytyn pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = \overline{OA} + 2\overline{BA}$ $(= \overline{OA} - 2\overline{AB})$.)

431. a) 4 b) 3
c) 5 d) $3\sqrt{5} \approx 6{,}7$
(Etäisyydet koordinaattitasoista ovat koordinaattien itseisarvot. Etäisyydet koordinaattiakseleista lasketaan Pythagoraan lauseella.)

432. $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ (tai mikä tahansa yhdensuuntainen vektori)

433. a) $2\vec{i} - \vec{j}$ (Tai mikä tahansa yhdensuuntainen vektori. Suuntavektorin näkee kulmakertoimesta $-\frac{1}{2}$ apukolmion avulla. Voidaan myös määrittää kaksi suoran pistettä, jolloin niitä yhdistävä vektori on suoran suuntavektori.)
b) 4

434. Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, jos ja vain jos
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t. \end{cases}$$
Piste (3, 6, 10) ei ole suoralla,
piste (–2, –4, –6) on.
(Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, jos ja vain jos $\overline{OP} = t\vec{v}$ eli $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = t(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$.
Ehto voidaan antaa myös vektorimuodossa.)

435. vektorit $\overline{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\overline{AC} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ (tai mitkä tahansa kaksi pisteitä A, B ja C yhdistävää vektoria)

436. Vektorien $\overline{BA} = 7\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\overline{BC} = \vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$ pistetulo on nolla. (Voidaan myös laskea kolmion sivujen pituudet ja käyttää Pythagoraan lauseen käänteislausetta.)

437. a) $3\vec{i} + 5\vec{j}$ (Tai mikä tahansa yhdensuuntainen vektori. Vaihdettiin $\vec{i}$:n ja $\vec{j}$:n kertoimet keskenään ja muutettiin toisen kertoimen merkki.)

b) $\frac{1}{\sqrt{34}}(3\vec{i} + 5\vec{j})$ ja $-\frac{1}{\sqrt{34}}(3\vec{i} + 5\vec{j})$

438. 19,3° (Vektorien $\overline{CA} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ ja $\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$ välinen kulma, jolle on $\cos(\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{21}{\sqrt{11}\sqrt{45}}$.)

439. a) 56,1° (Pistetulolla saadaan suoran suuntavektorin $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ja vektorin $\vec{j}$ välinen kulma 123,9°. Suorien välinen kulma on 180° – 123,9°.)
b) 33,9° (Suoran suuntavektorin $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ja xz-tasossa olevan projektiovektorin $4\vec{i} - 2\vec{k}$ välinen kulma.)

440. 83,6° (Jos asetetaan origo pisteeseen A (pohja xy-tasossa ja z-akseli ylöspäin), niin $\overline{AC} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{BD} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

Tällöin $\cos(\overline{AC}, \overline{BD}) = \frac{1}{9}$.)

441. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (Vektorit $\bar{a}$, $2\bar{b}$ ja $3\bar{c}$ muodostavat peräkkäin asetettuna suorakulmaisen kolmion, jonka kateetteina ovat vektorit $\bar{a}$ ja $2\bar{b}$ ja hypotenuusana $3\bar{c}$. Koska kateettien pituudet ovat 1 ja 2, niin hypotenuusan pituus on $\sqrt{5}$.)

442. $(4\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$ (Vektorin $\bar{v}$ pituus on 5, joten $\bar{u} = 3\bar{v}^0 = \frac{3}{5}\bar{v} = \frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j}$. Pisteen B paikkavektori on $\overline{OA} + \overline{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j}$.)

443. $\bar{a} = -\frac{13}{10}(\bar{i} + 3\bar{j}) + \frac{11}{10}(3\bar{i} - \bar{j})$

(Suoran $3x - y + 2 = 0$ kulmakerroin on 3, joten eräs suuntavektori on $\bar{i} + 3\bar{j}$ ja eräs normaalivektori $3\bar{i} - \bar{j}$. Yhtälö $2\bar{i} - 5\bar{j} = r(\bar{i} + 3\bar{j}) + s(3\bar{i} - \bar{j})$ johtaa yhtälöpariin $r + 3s = 2$, $3r - s = -5$. Suoran suuntavektorin voi löytää myös niin, että määritetään kaksi suoran pistettä, jolloin niiden välinen vektori on suoran suuntavektori. Vektoreiden $\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $3\bar{i} - \bar{j}$ sijasta voidaan käyttää mitä tahansa niiden kanssa yhdensuuntaista vektoria.)

444. $D = (2, -5, -1)$, kulma on 83,2°

(Koska nelikulmio on suunnikas, niin $\overline{AD} = \overline{BC} = \bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$, joten $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = (\bar{i} - 3\bar{k}) + (\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k})$. Lävistäjien välinen kulma on lävistäjävektorien $\overline{AC} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$ ja $\overline{BD} = -\bar{i} - 8\bar{j} - 3\bar{k}$ välisen kulman suplementtikulma.)

445. Osoitetaan pistetulon avulla, että suoran suuntavektori $2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ on kohtisuorassa kahta tasossa olevaa erisuuntaista vektoria vastaan, esimerkiksi vektoreita $2\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ (ensimmäinen ja toinen piste) ja $2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ (toinen ja kolmas piste) vastaan.

446. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tai $(1, 2)$ (Suoran pisteet ovat muotoa $P = (x, x + 1)$, joten $\overline{AP} = (x - 1)\bar{i} + x\bar{j}$ ja $\overline{BP} = (x + 1)\bar{i} + (x - 1)\bar{j}$.

Tällöin $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = (x - 1)(x + 1) + x(x - 1) = 0$, kun $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$.)

447. Merkitään $\overline{AB} = \bar{a}$ ja $\overline{AD} = \bar{b}$. Tällöin on $\overline{AP} = \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}$ ja

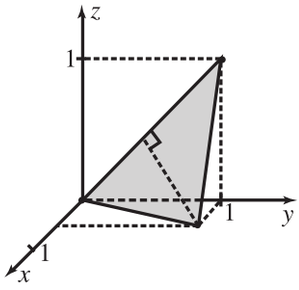
$\overline{CQ} = -\bar{b} + \frac{1}{3}(-\bar{a} + \bar{b}) = -\frac{2}{3}\bar{b} - \frac{1}{3}\bar{a}$.

Koska $\overline{AP} = -\frac{2}{3}\overline{CQ}$, vektorit $\overline{AP}$ ja $\overline{CQ}$ ja siis myös janat AP ja CQ ovat yhdensuuntaiset.

448. $\frac{1}{5}$ (Asetetaan $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ alkamaan origosta, jolloin päätepisteet ovat $A(1, 1)$ ja $B(-2, -3)$. Korkeusjanan pituus on origon etäisyys pisteiden A ja B kautta kulkevasta suorasta $4x - 3y - 1 = 0$. Voidaan myös määrittää kolmion ABC pinta-ala $\frac{1}{2}$ (suorakulmion pinta-alasta $3 \cdot 4$ vähennetään pienemmän suorakulmion pinta-ala $2 \cdot 1$ ja kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat) ja kannan AC pituus 5, jolloin $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{1}{2}$.

Voidaan myös määrittää pistetulon avulla kulman $\alpha = \sphericalangle OAB$ kosini $\frac{7}{5\sqrt{2}}$ ja trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella $\sin\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, jolloin $h = |\overline{AO}| \sin\alpha$.)

449. Pinta ala on $\frac{\sqrt{6}}{4}$.



(Kolmion $O(0, 0, 0)$, $A(\frac{1}{2}, 1, 0)$ ja $B(0, 1, 1)$ sivujen pituudet ovat $OA = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ja $OB = \sqrt{2}$, joten kolmio on tasakylkinen.

Sivulle OB piirretty korkeus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ saadaan Pythagoraan lauseella.
Voidaan myös laskea vektorien $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ välisen kulman kosini pistetulon avulla, sen jälkeen sinin tarkka arvo yhtälöllä $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ja käyttää kolmion pinta-alan trigonometrista kaavaa.)

450. $t = \frac{7}{10}$ (Piste $P = (2 - t, 1 + 3t)$. Suoran yhtälö on $x - 3y + 8 = 0$. Piste P on suoralla, kun $2 - t - 3(1 + 3t) + 8 = 0$.)

451. $2x - y - 5 = 0$
(*Tapa 1.* Suora kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta, ja sillä on suuntavektori $\bar{i} + 2\bar{j}$, joten suoran kulmakerroin on 2. Suoran yhtälö on $y - (-1) = 2(x - 2)$. Voidaan myös valita kaksi suoran pistettä, esimerkiksi $(2, -1)$ (kun $t = 0$) ja $(3, 1)$ (kun $t = 1$), ja määrittää niiden kautta kulkevan suoran yhtälö.
Tapa 2. Vektorin päätepiste on $(2 + t, -1 + 2t)$ eli $x = 2 + t$ ja $y = -1 + 2t$. Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $t = x - 2$ ja sijoitetaan toiseen yhtälöön.)

452. Eivät kohtaa. (Tutkitaan, leikkaavatko pisteen P_1 kautta kulkeva vektorin $\bar{v}_1$ suuntainen suora ja pisteen P_2 kautta kulkeva vektorin $\bar{v}_2$ suuntainen suora toisensa. Piste $P(x, y, z)$ on ensimmäisellä suoralla, jos on olemassa sellainen luku s, että $\overline{OP} = \overline{OP}_1 + s\bar{v}_1$ eli $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (10 + 2s)\bar{i} + 4s\bar{j} + 3s\bar{k}$.
Piste P on jälkimmäisellä suoralla, jos on olemassa sellainen luku t, että $\overline{OP} = \overline{OP}_2 + t\bar{v}_2$ eli $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$
$= (310 - 4t)\bar{i} + (480 - 6t)\bar{j} + (400 - 5t)\bar{k}$.
Saadaan yhtälöryhmä $10 + 2s = 310 - 4t$, $4s = 480 - 6t$ ja $3s = 400 - 5t$.
Kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari toteutuu, kun $s = 30$ ja $t = 60$.
Luvut eivät toteuta kolmatta yhtälöä.)

453. suhteessa 1 : 2 (Merkitään $\overline{AB} = \bar{a}$ ja $\overline{AC} = \bar{b}$. Olkoon P mediaanin $\overline{AM}$ jatkeen ja janan CD leikkauspiste. Koska P on mediaanin jatkeella, on olemassa sellainen luku s, että

$$\overline{AP} = s\overline{AM} = s(\tfrac{1}{2}\bar{a} + \tfrac{1}{2}\bar{b}) = \tfrac{1}{2}s\bar{a} + \tfrac{1}{2}s\bar{b}.$$

Koska piste P on janalla CD, on olemassa sellainen luku t, että $\overline{CP} = t\overline{CD}$, jolloin

$$\overline{AP} = \overline{AC} + t\overline{CD} = \bar{b} + t(-\bar{b} + 2\bar{a})$$
$$= 2t\bar{a} + (1 - t)\bar{b}.$$

Yhtälöparista $\frac{1}{2}s = 2t$, $\frac{1}{2}s = 1 - t$

saadaan $t = \frac{1}{3}$.)

454. Ei ole. ($\bar{a} + \bar{c} = (d + 4)\bar{i} + (d - 1)\bar{j}$ ja $\bar{b} + \bar{c} = (d - 3)\bar{i} + (d + 2)\bar{j}$. Tutkitaan, onko olemassa sellainen luku $t > 0$, että $\bar{a} + \bar{c} = t(\bar{b} + \bar{c})$ eli $d + 4 = t(d - 3)$ ja $d - 1 = t(d + 2)$. Ratkaisemalla kummastakin yhtälöstä t saadaan $\frac{d + 4}{d - 3} = \frac{d - 1}{d + 2}$, josta $d = -\frac{1}{2}$. Tällöin $t = \frac{d - 1}{d + 2} = -1 < 0$, joten positiivista lukua t ei ole. Arvo $t = -1$ saadaan myös d:tä ratkaisematta, jos huomataan, että d eliminoituu, kun vähennetään yhtälöt $d + 4 = td - 3t$ ja $d - 1 = td - 2$ toisistaan.)

455. $\frac{1}{\sqrt{130}}(11\bar{i}+3\bar{j})$ (Olkoon $A=(1,2)$, $B=(4,6)$ ja $C=(13,-3)$. Jos $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat yhtä pitkät vektorien $\overline{AB}=3\bar{i}+4\bar{j}$ ja $\overline{AC}=12\bar{i}-5\bar{j}$ suuntaiset vektorit, niin vektori $\bar{w}=\bar{u}+\bar{v}$ on kulman puolittajan suuntainen. Koska $|\overline{AB}|=5$ ja $|\overline{AC}|=13$, voidaan valita esimerkiksi $\bar{u}=\overline{AB}$ ja $\bar{v}=\frac{5}{13}\overline{AC}$, jolloin

$$\bar{w}=3\bar{i}+4\bar{j}+\frac{5}{13}(12\bar{i}-5\bar{j})=\frac{9}{13}(11\bar{i}+3\bar{j}).$$

Kysytty vektori on vektorin $11\bar{i}+3\bar{j}$ suuntainen yksikkövektori. Voidaan myös käyttää lausetta, jonka mukaan puolittajan ja vastaisen sivun BC leikkauspiste P jakaa sivun BC viereisten sivujen pituuksien suhteessa 5 : 13. Puolittajalle saadaan suuntavektori $\overline{AP}=\overline{AB}+\frac{5}{18}\overline{BC}$.)

456. pisteistä $(0,1,2)$ ja $(1,2,1)$
(Suoralla on suuntavektori $\bar{u}=\overline{AB}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$. Piste $P(x,y,z)$ on suoralla, jos on olemassa sellainen luku t, että $\overline{OP}=\overline{OA}+t\bar{v}$ eli $\overline{OP}=(3+t)\bar{i}+(4+t)\bar{j}+(-1-t)\bar{k}$.
Tällöin $\overline{CP}=(3+t)\bar{i}+(1+t)\bar{j}+(-1-t)\bar{k}$ ja $\overline{DP}=(4+t)\bar{i}+(3+t)\bar{j}+(-3-t)\bar{k}$.
Kulma CPD on suora kulma, kun $\overline{CP}\cdot\overline{DP}=0$ eli
$(3+t)(4+t)+(1+t)(3+t)+(-1-t)(-3-t)=0$.
Yhtälöstä saadaan t:n arvot -3 ja -2.)

457. 480 m (Lentokone kulkee pitkin suoraa, joka kulkee pisteen $A=(1500,2000,0)$ kautta ja jonka suuntavektori on $\bar{v}=-20\bar{i}+10\bar{j}+3\bar{k}$. Piste $P(x,y,z)$ on suoralla, jos $\overline{OP}=\overline{OA}+t\bar{v}$ $=(1500-20t)\bar{i}+(2000+10t)\bar{j}+3t\bar{k}$ eli kun $x=1500-20t$, $y=2000+10t$ ja $z=3t$.
Piste P on tien yläpuolella, kun $2x+y=200$ eli kun
$2(1500-20t)+(2000+10t)=200$.
Yhtälöstä saadaan $t=160$, jolloin korkeus on $3t=480$.)

458. piste $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{11}{3})$, etäisyys $2\sqrt{5}$
(Suoran L suuntavektori on $\bar{v}=\overline{AB}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$. Piste R on lähin suoran piste, jos $\overline{PR}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan. Koska R on suoralla L, niin $\overline{PR}=\overline{PA}+t\bar{v}=(1+t)\bar{i}+(4-2t)\bar{j}+(2+2t)\bar{k}$.
Kohtisuoruusehdosta $\bar{v}\cdot\overline{PR}=0$ saadaan yhtälö $1(1+t)-2(4-2t)+2(2+2t)=0$ ja edelleen $t=\frac{1}{3}$. Pisteen R paikkavektori on $\overline{OP}=\overline{OA}+\frac{1}{3}\bar{v}$. Etäisyys on janan PR pituus.

Etäisyys d voidaan laskea myös yhtälöstä $d=|\overline{AP}|\sin\alpha$, missä α on janan AP ja suoran L välinen terävä kulma. Kulman α kosinin tarkka arvo saadaan vektorien $\overline{AP}$ ja $\bar{v}$ pistetulolla ja $\sin\alpha$ edelleen yhtälöstä $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.)

459. pisteessä $(\frac{50}{47},\frac{20}{47},\frac{72}{47})$ (Tason kaksi suuntavektoria ovat $\bar{u}=\overline{AB}=-2\bar{i}+5\bar{j}$ ja $\bar{v}=\overline{AC}=-2\bar{i}+4\bar{k}$. Vektori pisteestä P tason pisteeseen R on $\overline{PR}=\overline{PA}+s\bar{u}+t\bar{v}$
$=2\bar{i}-\bar{k}+s(-2\bar{i}+5\bar{j})+t(-2\bar{i}+4\bar{k})$
$=(2-2s-2t)\bar{i}+5s\bar{j}+(-1+4t)\bar{k}$.
Vektorin $\overline{PR}$ tulee olla kohtisuorassa molempia suuntavektoreita $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan.
Yhtälöparista
$\bar{u}\cdot\overline{PR}=-2(2-2s-2t)+5\cdot 5s=0$ ja
$\bar{v}\cdot\overline{PR}=-2(2-2s-2t)+4\cdot(-1+4t)=0$
saadaan $s=\frac{4}{47}$ ja $t=\frac{18}{47}$.
Pisteen R paikkavektori on
$\overline{OR}=\overline{OA}+\frac{4}{47}\bar{u}+\frac{18}{47}\bar{v}$.
Voidaan myös määrittää jokin tason normaalivektori $\bar{n}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ ehdoista
$\bar{n}\cdot\bar{u}=-2a+5b=0$ ja $\bar{n}\cdot\bar{v}=-2a+4c=0$.
Valitsemalla esimerkiksi $a=10$ saadaan $b=4$, $c=5$ ja $\bar{n}=10\bar{i}+4\bar{j}+5\bar{k}$.
Sen jälkeen lasketaan suoran $\overline{OQ}=\overline{OP}+r\bar{n}$ ja tason $\overline{OQ}=\overline{OA}+s\bar{u}+t\bar{v}$ leikkauspiste.)

460. Kaikki suorat kulkevat pisteen $(6, 6)$ kautta. (Olkoon $A = (a, 0)$ ja $C = (0, b)$, jolloin $B = (a, b)$, missä $a + b = 6$. Voidaan piirtää kaksi vaihtoehtoa, esimerkiksi $a = 3$, $b = 3$ ja $a = 4$, $b = 2$, huomata piste $D = (6, 6)$ ja laskea:
$\overline{BD} \cdot \overline{AC} = ((6 - a)\bar{i} + (6 - b)\bar{j}) \cdot (-a\bar{i} + b\bar{j})$
$= -6a + a^2 + 6b - b^2$
$= (a + b)(a - b) - 6(a - b)$
$= (a - b)(a + b - 6) = 0.$
Voidaan myös laskea janojen BD ja AC kulmakertoimien tulo.
Voidaan myös muodostaa normaalin suuntavektori $\bar{n} = b\bar{i} + a\bar{j}$ ja edelleen parametriyhtälö $\overline{OP} = \overline{OB} + t\bar{n} = (a + tb)\bar{i} + (b + ta)\bar{j}$ ja huomata, että kun $t = 1$, saadaan piste $P = (6, 6)$.
Voidaan myös muodostaa normaalin yhtälö $y - a = \frac{b}{a}(x - b)$, laskea kahta vaihtoehtoa vastaavien normaalien leikkauspisteet, löytää piste $(6, 6)$ ja sijoittaa suoraparven yhtälöön.)

461. Kärki C piirtää suoran $y = x - 1$ ja kärki D suoran $x = 1$. (Kun B on x-akselin pisteessä $(t, 0)$, niin $\overline{AB} = t\bar{i} - \bar{j}$.
Tällöin $\overline{AD} = \overline{BC} = \bar{i} + t\bar{j}$, joten
$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = t\bar{i} + \bar{i} + t\bar{j} = \bar{i} + t(\bar{i} + \bar{j})$ ja
$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \bar{i} + \bar{j} + t\bar{j}$.
Siis piste C piirtää suoran, joka kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta ja jolla on suuntavektori $\bar{i} + \bar{j}$, ja piste D suoran, joka kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta ja jolla on suuntavektori $\bar{j}$.)

462. Lävistäjien välinen kulma on suora kulma, pinta-ala on 360. (Nelikulmio on mahdollista muodostaa, jos pisteet ovat samassa tasossa ja mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla. Tutkitaan ensin, onko piste D pisteiden A, B, C määräämässä tasossa. Koska vektorit $\bar{u} = \overline{AB} = -8\bar{i} + 16\bar{j} + 16\bar{k}$ ja $\bar{v} = \overline{AC} = -17\bar{i} + 16\bar{j} - 2\bar{k}$ eivät ole yhdensuuntaiset, pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla. Tutkitaan, onko piste $D(15, 13, 13)$ pisteiden A, B ja C määräämässä tasossa $\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v}$. Piste D on tasossa, jos joillakin s ja t on $15 = 12 - 8s - 17t$, $13 = 7 + 16s + 16t$ ja $13 = -5 + 16s - 2t$.
Kaikki kolme yhtälöä toteutuvat, kun $s = \frac{25}{24}$ ja $t = -\frac{2}{3}$, joten piste D on pisteiden A, B ja C määräämässä tasossa, ja koska $s \neq 0$ ja $t \neq 0$, mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla. Siis on mahdollista muodostaa ainakin yksi nelikulmio. Tutkitaan, leikkaavatko janat AB ja CD. Suoralla CD on suuntavektori $\bar{w} = \overline{CD} = 20\bar{i} - 10\bar{j} + 20\bar{k}$. Suorat AB ja CD leikkaavat, jos suorilla $\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u}$ ja $\overline{OP} = \overline{OC} + t\bar{w}$ on yhteinen piste eli jos joillakin s ja t on $12 - 8s = -5 + 20t$, $7 + 16s = 23 - 10t$ ja $-5 + 16s = -7 + 20t$.
Kaikki kolme yhtälöä toteutuvat, kun $s = \frac{5}{8}$ ja $t = \frac{3}{5}$, joten suorat AB ja CD leikkaavat.
Koska $0 < \frac{5}{8} < 1$ ja $0 < \frac{3}{5} < 1$, niin janat AB ja CD leikkaavat. Siis nelikulmio voidaan muodostaa vain niin, että sivuina ovat AC, CB, BD ja DA. Nelikulmion lävistäjävektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ pistetulo on 0, joten lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Lävistäjät jakavat tällöin nelikulmion neljään suorakulmaiseen kolmioon, joiden yhteinen pinta-ala on puolet lävistäjien pituuksien tulosta.)

Funktion jatkuvuus ja funktion derivaatta

463. Yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = x^5 - 200x^3 - 80$ nollakohtia. Koska funktio f on jatkuva ja arvot $f(14) = -11\,056$ ja $f(15) = 84\,295$ ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]14, 15[$.

464. Huomataan, että esimerkiksi arvot $f(-1) \approx -3{,}4$ ja $f(1) \approx 2{,}6$ ovat erimerkkiset.

465. Esimerkiksi on $f(-2) = 15 > 0$, $f(0) = -7 < 0$ ja $f(2) = 3 > 0$. Funktiolla f on siis nollakohta väleillä $]-2, 0[$ ja $]0, 2[$ ja siis ainakin kaksi nollakohtaa.

466. a) 24 ($g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$, joten $g'(3) = 2 \cdot 3f(3) + 9f'(3)$.)
b) 8 ($h'(x) = 2f(x)f'(x)$, joten $h'(1) = 2f(1)f'(1)$.)
c) -4 ($u'(x) = f'(4x) \cdot \mathrm{D}(4x) = 4f'(4x)$, joten $u'(1) = 4f'(4)$.)
d) -4 ($v'(x) = f'(x^2) \cdot \mathrm{D}x^2 = 2xf'(x^2)$, joten $v'(2) = 2 \cdot 2f'(4)$.)

467. a) -5 ($f'(x) = -2e^{-2x} - 3\cos 3x$)
b) $\frac{1}{5}$

468. 0 ($f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{3x-2}$)

469. (1, 4) ja (−1, 0) ($f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ ja $f'(x) = 0$, kun $x = 1$ tai $x = -1$.)

470. -2 (funktion $f(x) = 3x^2 + 12x + 5$ derivaattafunktion $f'(x) = 6x + 12$ nollakohta)

471. $f'(x) = 5x^4 + 4x^2$. Koska $x^4 \geqslant 0$ ja $x^2 \geqslant 0$ kaikilla x, niin $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x. Lisäksi $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = 0$.

472. a) $g'(x) = -e^{-x} - 3$. Koska $e^{-x} > 0$ kaikilla x, niin $-e^{-x} - 3 < -3 < 0$ kaikilla x.
Funktio g on siis kaikkialla aidosti vähenevä.
b) $x_2 > x_1$ ja $g(x_1) > g(x_2)$

473. $f'(x) = 1 + \sin x$. Koska $\sin x \geqslant -1$ kaikilla x, niin $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x. Lisäksi $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa, joissa $\sin x = -1$, eli kohdissa $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

474. aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 3]$, aidosti kasvava välillä $[3, \infty[$, minimikohta 3 ja minimiarvo -9 (Voidaan päätellä suoraan kuvaajan muodosta: kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huipun x-koordinaatti on 3. Voidaan myös laatia derivaattafunktion $f'(x) = 2x - 6$ merkkikaavio (kuvaaja nouseva suora) ja täydentää se funktion f kulkukaavioksi.)

475. Suurin arvo 5, pienintä arvoa ei ole. (Voidaan laatia derivaattafunktion $f'(x) = -2x + 2$ merkkikaavio (kuvaaja laskeva suora), täydentää se funktion f kulkukaavioksi ja päätellä kulkukaaviosta, että funktio f saa suurimman arvon derivaattafunktion nollakohdassa $x = 1$. Voidaan päätellä myös suoraan: funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten suurin arvo on $f(1)$, missä $x = 1$ on huipun x-koordinaatti.)

476. a) 6 (Välillä $]2, 5[$ on derivaattafunktion nollakohta 4. Lasketaan arvot $f(4) = 2$, $f(2) = 6$ ja $f(5) = 3$ ja valitaan suurin.)
b) 18 (Välillä $]0, 2[$ ei ole derivaattafunktion nollakohtaa. Lasketaan arvot $f(0) = 18$ ja $f(2) = 6$ ja valitaan suurin.)

477. -27 (Derivaattafunktion $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$ nollakohdat ovat 0 ja 3. Välillä $]1, 4[$ on nollakohta 3. Arvoista $f(1) = -3$, $f(3) = -27$ ja $f(4) = 0$ pienin on -27.)

478. $\frac{9}{4}$ (Tangentin kulmakerroin on $f'(1) = -2$ ja normaalin kulmakerroin $\frac{1}{2}$. Normaali $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{2})$ ja x-akselin pisteessä $(-3, 0)$.)

479. tangentin yhtälö $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$ (Käyrät ovat paraabelit $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $y = 2x^2 + 1$. Yhtälöstä $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 2x^2 + 1$ (joka kerrotaan 4:llä) nähdään, että käyrillä on yksi yhteinen piste, jonka x-koordinaatti on $\frac{1}{3}$. Koska funktioille $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $g(x) = 2x^2 + 1$ on $f'(\frac{1}{3}) = g'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, käyrät sivuavat toisiaan ja yhteisen tangentin kulmakerroin on $\frac{4}{3}$. Sivuamispisteen y-koordinaatti on $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{9}$ ja tangentin yhtälö $y - \frac{11}{9} = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{3})$.)

480. $4x - y - 5 = 0$ ja $12x - 3y + 17 = 0$
(Suoran kulmakerroin on 4. Muuttujan arvon x kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $y'(x) = x^2$. Tulee siis olla $x = 2$ tai $x = -2$. Vastaavat kuvaajan pisteet ovat $(2, 3)$ ja $(-2, -\frac{7}{3})$ ja yhtälöt $y - 3 = 4(x - 2)$ ja $y + \frac{7}{3} = 4(x + 2)$.)

481. Yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = x - \ln x$, missä $x > 0$, nollakohtia. Derivaattafunktion $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ainoa nollakohta on $x = 1$. Kulkukaaviosta nähdään, että $f(1)$ on funktion f pienin arvo. Koska $f(1) = 1 > 0$, niin $f(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Siis funktiolla f ei ole nollakohtia.

482. $[-\frac{1}{3e}, \infty[$ (Derivaattafunktion $f'(x) = (1 + 3x)e^{3x}$ nollakohta on $x = -\frac{1}{3}$. Koska $e^{3x} > 0$, lauseke $1 + 3x$ määrää derivaatan merkin. Kulkukaavion nojalla $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}e^{-1} = -\frac{1}{3e}$ on funktion f pienin arvo. Koska $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, ja koska f jatkuvana funktiona saa kaikki arvot kahden saamansa arvon välistä, arvojoukko on väli $[-\frac{1}{3e}, \infty[$.)

483. likiarvo 2,09 (Yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = \sin 3x - 3x + 2\pi$ nollakohtia.
Koska $f(0) = 2\pi > 0$ ja $f(3) \approx -2{,}3 < 0$, niin funktiolla on ainakin yksi nollakohta.
Derivaattafunktio on $f'(x) = 3\cos 3x - 3$.
Koska aina on $\cos 3x \leqslant 1$, niin
$f'(x) = 3\cos 3x - 3 \leqslant 3 \cdot 1 - 3 = 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa, joissa $\cos 3x = 1$, eli kohdissa $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$.
Funktio f on siis kaikkialla aidosti vähenevä, joten muita juuria ei ole.
Haarukoimalla havaitaan ennen pitkää, että
$f(2{,}09) \approx 3{,}8 \cdot 10^{-7} > 0$ ja
$f(2{,}095) \approx -9{,}96 \cdot 10^{-10} < 0$.)

484. $y = -\frac{1}{4}x$ (Käyrälle $y = \frac{1}{x-4}$ pisteeseen $(a, \frac{1}{a-4})$ piirretyn tangentin yhtälö on $y - \frac{1}{a-4} = -\frac{1}{(a-4)^2}(x - a)$.
Sijoitetaan $x = y = 0$ ja ratkaistaan $a = 2$.)

485. Tutkitaan erotusta
$f(x) = x(1 + \ln x) - (x - e^{-1}) = x \ln x + e^{-1}$, missä $x > 0$. Derivaattafunktion $f'(x) = 1 + \ln x$ arvo on 0, kun $\ln x = -1$ eli kun $x = e^{-1}$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f saa pienimmän arvon kohdassa e^{-1}. Pienin arvo on
$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} + e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) + e^{-1} = 0$.
Koska funktion f pienin arvo on 0, niin $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x > 0$.

486. suurin arvo -9, pienin arvo 0 (Määritetään ensin funktion $g(x) = x^3 + 5x^2 + 7x - 6$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$. Derivaattafunktiolla $g'(x) = 3x^2 + 10x + 7$ on välillä $]-2, 1[$ nollakohta -1. Laskemalla arvo $g(-1)$ ja päätepistearvot $g(-2)$ ja $g(1)$ nähdään, että funktion g suurin arvo välillä $[-2, 1]$ on 7 ja pienin -9. Funktion $f = |g|$ suurin arvo välillä $[-2, 1]$ on siis 9 ja pienin arvo, koska funktio g on jatkuva, on 0.)

487. suurin arvo 2, pienin arvo $-\sqrt{5}$

(Funktion $f(x) = 2x - \sqrt{1 - x^2}$ määrittelyjoukko on suljettu väli $[-1, 1]$.
Derivaattafunktion

$$f'(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

arvo on 0, kun $2\sqrt{1 - x^2} = -x$.
Yhtälön neliöönkorotusehto on $x \leqslant 0$.
Saadaan yhtälö $4(1 - x^2) = x^2$, jonka juurista $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ täyttää neliöönkorotusehdon.

Lasketaan funktion arvo $f(-\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$ ja päätepistearvot $f(-1) = -2$ ja $f(1) = 2$.)

488. likiarvo $1{,}490$ (Juuret ovat funktion $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$, missä $x \geqslant 0$, nollakohtia.
Derivaattafunktion

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

arvo on 0, kun $4x\sqrt{x} = 1$. Koska $x > 0$, yhtälö on yhtäpitävä neliöön korotetun yhtälön $16x^3 = 1$ kanssa.
Derivaatan nollakohta on $\frac{1}{\sqrt[3]{16}} \approx 0{,}397$.
Kulkukaaviosta nähdään, että f on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{16}}]$. Koska $f(0) = -1$, tällä välillä ei ole nollakohtaa.
Koska f on aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{\sqrt[3]{16}}, \infty[$ ja $f(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}) \approx -1{,}5 < 0$ ja esimerkiksi $f(4) = 13 > 0$, niin funktiolla on tällä välillä tasan yksi nollakohta. Siis funktiolla f on tasan yksi nollakohta. Haarukoimalla päädytään ennen pitkää arvoihin $f(1{,}490) = -5{,}6 \cdot 10^{-4} < 0$ ja $f(1{,}4905) \approx 7{,}3 \cdot 10^{-4} > 0$.)

489. $p \geqslant \frac{1}{4}$ (Jos $p = 0$, niin funktio on $3x^2 + 6x + 1$. Funktion kuvaaja on paraabeli, joten funktio ei ole kaikkialla aidosti kasvava.
Oletetaan, että $p \neq 0$. Funktion $f(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ derivaattafunktion $f'(x) = 6px^2 + 6x + 6$ kuvaaja on paraabeli.
Jotta f olisi kaikkialla aidosti kasvava, paraabelin tulee aueta ylöspäin ja sen tulee olla x-akselin yläpuolella tai sivuta x-akselia.
Siis tulee olla $p > 0$ ja $D = 36 - 144p \leqslant 0$.)

490. $74°$ (Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon niin, että heittopiste on y-akselin pisteessä $(0, 2)$ ja osumapiste on $(5, 5)$. Paraabelin yhtälö on tällöin muotoa $y = ax^2 + bx + 2$. Yhtälöistä $25a + 5b + 2 = 5$ (kulkee pisteen $(5, 5)$ kautta) ja $6a + b = 0$ (derivaatta kohdassa 3 on 0) saadaan $a = -0{,}6$ ja $b = 3{,}6$, joten $y = -0{,}6x^2 + 3{,}6x + 2$. Heittokulma α on heittopisteeseen piirretyn paraabelin tangentin suuntakulma. Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x + 2$ derivaatta $f'(0) = 3{,}6$. Siis $\tan\alpha = 3{,}6$.)

491. $$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right) : (x-3)$$

$$= \frac{3-x}{3x} \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3x} \to -\frac{1}{9}, \text{ kun } x \to 3$$

492. Tutkitaan funktion $f(x) = (x+1)^3 - x$ kulkua. Derivaattafunktion $f'(x) = 3(x+1)^2 - 1$ nollakohdat ovat $x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} \approx -1{,}58$ ja $x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}42$. Kulkukaavion perusteella f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, x_1[$, joten funktiolla on tällä välillä enintään yksi nollakohta. Koska $f(-3) = -5 < 0$ ja $f(-2) = 1 > 0$, funktiolla on nollakohta välillä $]-\infty, x_1[$. Koska f on aidosti vähenevä välillä $[x_1, x_2]$ ja $f(x_2) \approx 0{,}62 > 0$, funktiolla f ei ole nollakohtaa välillä. Koska f on aidosti kasvava välillä $[x_2, \infty[$ ja $f(x_2) > 0$, funktiolla f ei ole nollakohtaa välillä $[x_2, \infty[$. Siis funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

493. Yhtälön juuret ovat funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ nollakohtia. Koska $0 \leqslant a \leqslant 1$, niin funktion arvot $f(0) = a$ ja $f(1) = -1 + a$ ovat joko erimerkkiset tai toinen niistä on nolla. Siis funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $[0, 1]$. Funktion f derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ nollakohdat ovat $-\frac{1}{3}$ ja 1. Koska derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, derivaattafunktio on negatiivinen välillä $]0, 1[$. Funktio f on aidosti vähenevä välillä $[0, 1]$, joten sillä on tällä välillä korkeintaan yksi nollakohta. Siis nollakohtia on tasan yksi.

494. Tilavuus on aina $\frac{9\pi}{4}$.

(Pisteeseen $P = (a, \frac{1}{a^2})$ piirretty tangentti $y - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a)$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{a^2})$ ja x-akselin pisteessä $(\frac{3a}{2}, 0)$. Kartion tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3|a|}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{9\pi}{4}$ ja on siis a:sta riippumaton.)

495. määrittelyjoukko $\mathbb{R}$, nollakohta 4, $f^{-1}(0) \approx -1{,}31$, leikkauspiste $(-\ln 5, -\ln 5)$
(Koska $f'(x) = e^{-x} + 1 > 0$ kaikilla x, funktio f on kaikkialla aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. Koska $-e^{-x} \to 0$, kun $x \to \infty$, niin $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Koska $-e^{-x} \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, niin $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$.
Koska f on jatkuva, funktion f arvojoukko ja siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
Koska $f(0) = 4$, niin $f^{-1}(4) = 0$.
Määritetään haarukoimalla sellainen x_0, jolle $f(x_0) \approx 0$. Tällöin $f^{-1}(0) \approx x_0$.
Käänteisfunktion kuvaaja on funktion f kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen, joten leikkauspisteet ovat suoralla $y = x$ ja ne löydetään yhtälöllä $f(x) = x$.)

496. suurin arvo $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ja pienin arvo $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(Koska funktio f on jaksollinen jaksona 2π, riittää, kun määritetään suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 2\pi]$. Derivaattafunktio

$f'(x) = \cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x$

$= \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x) = 0,$

kun $\cos x = 0$ tai $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$ eli kun

$\cos x = 0$ tai $\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensimmäisen yhtälön juuret välillä $]0, 2\pi[$ ovat $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2}$.

Yhtälö $\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ toteutuu välillä $]0, 2\pi[$ kahdessa kohdassa, joista toisessa on $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ja toisessa $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Yhtälö $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ toteutuu kahdessa kohdassa, joista toisessa on $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ja toisessa $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lasketaan funktion f arvot $f(\frac{\pi}{2})$ ja $f(\frac{3\pi}{2})$, sijoitetaan edelliset neljä sinin ja kosinin vaihtoehtoa, lasketaan päätepistearvot $f(0) = f(2\pi)$ ja valitaan suurin ja pienin arvo.
Toinen tapa on kirjoittaa funktion f lauseke pelkästään sinin avulla:
$f(x) = \sin x \cos^2 x = \sin x(1 - \sin^2 x)$. Funktion $\sin x$ arvojoukko on väli $[-1, 1]$, joten voidaan merkitä $\sin x = t$ ja määrittää funktion $g(t) = t(1 - t^2) = t - t^3$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.)

497. suorat $y = 1$, $y = 2\sqrt{6}x - 5$ ja $y = -2\sqrt{6}x - 5$

(Paraabelille $y = x^2 + 1$ pisteeseen $(a, a^2 + 1)$ piirretyn tangentin yhtälö on
$y - a^2 - 1 = 2a(x - a)$ eli $2ax - y - a^2 + 1 = 0$.
Suora on myös ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti, jos sen etäisyys origosta on 1 eli
$\frac{|-a^2 + 1|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = 1$. Yhtälö toteutuu, kun
$a = 0$ tai $a = \sqrt{6}$ tai $a = -\sqrt{6}$.)

498. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, yhtäsuuruus pätee, kun $x = 1$.

$(x^{\frac{1}{x}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Epäyhtälö
$e^{\frac{\ln x}{x}} \leqslant e^{1 - \frac{1}{x}}$ on yhtäpitävä epäyhtälön
$\frac{\ln x}{x} \leqslant 1 - \frac{1}{x}$ kanssa. Erotusfunktion
$f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}$ derivaattafunktiolla
$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$ on nollakohta $x = 1$. Kulkukaaviosta nähdään, että $f(1) = 0$ on funktion f suurin arvo ja että $f(x) < 0$, kun $x \neq 1$. Siis $f(x) \leqslant 0$ kaikilla x ja yhtäsuuruus pätee vain arvolla $x = 1$.)

499. $P(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{2}x$

(Merkitään $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Koska $f(x) + f(-x) = 0$ kaikilla x, niin $bx^2 + d = 0$ kaikilla x, joten $b = d = 0$. Ehdoista $P'(-1) = 0$ ja $P(-1) = 5$ saadaan yhtälöt $3a + c = 0$ ja $-a - c = 5$.)

500. pistettä $(0, \frac{1}{2})$ (Pisteeseen $P = (a, \frac{1}{1 + a^2})$ piirretyn normaalin yhtälö on

$y - \frac{1}{1 + a^2} = \frac{(1 + a^2)^2}{2a}(x - a).$

Normaali leikkaa y-akselin pisteessä, jonka y-koordinaatti on $\frac{1}{1 + a^2} - \frac{(1 + a^2)^2}{2}$

$\to \frac{1}{1 + 0^2} - \frac{(1 + 0^2)^2}{2}$, kun $a \to 0$.)

501. $\frac{\pi}{12}$ (Tangentti $y - a^4 = 4a^3(x - a)$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3a^4)$.

Normaali $y - a^4 = -\frac{1}{4a^3}(x - a)$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, a^4 + \frac{1}{4a^2})$.

Kartion pohjaympyrän säde on $|a|$, joten kaksoiskartion tilavuus on

$\frac{1}{3}\pi a^2(4a^4 + \frac{1}{4a^2}) = \frac{1}{3}\pi(4a^6 + \frac{1}{4}) \to \frac{\pi}{12}$,

kun $a \to 0$.)

502. Tutkitaan funktiota $f(x) = (1 + x)\ln x + 2(1 - x)$, joka on määritelty, kun $x > 0$. Funktion derivaattafunktio on

$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ ja toinen derivaattafunktio

$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. $f''(x) < 0$, kun $0 < x < 1$, joten funktio f' on aidosti vähenevä välillä $]0, 1]$. Koska $f'(1) = 0$, niin $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$. Siis funktio f on aidosti kasvava välillä $]0, 1]$. Koska $f(1) = 0$, niin $f(x) \leqslant 0$, kun $0 < x \leqslant 1$.

503. b) Likiarvo on pienempi kuin oikea arvo ja poikkeaa oikeasta arvosta vähemmän kuin

$\frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \approx 3{,}33 \cdot 10^{-7}$.

(a) Epäyhtälöt ovat määritellyt, kun $x > -1$.

i) Erotusfunktion $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$

derivaattafunktio $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$

on positiivinen funktion koko määrittelyjoukossa $]-1, \infty[$, joten f on aidosti kasvava. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

ii) Erotusfunktion

$g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ derivaattafunktio $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{1+x}$ on negatiivinen, kun $x > 0$, joten g on aidosti vähenevä välillä $[0, \infty[$.

Koska $g(0) = 0$, niin $g(x) < 0$, kun $x > 0$.

b) Epäyhtälöiden mukaan

$\ln(1 + x) - \frac{x^3}{3} < x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$

eli välillä $]0; 0{,}01[$ on

$\ln(1 + x) - \frac{1}{3} \cdot 0{,}01^3 < x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$.)

504. Funktion $f(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ ja toinen derivaattafunktio $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2$.

Merkitään $e^x = t$ $(t > 0)$, jolloin

$e^x + e^{-x} - 2 = t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{t}$

$= \frac{(t-1)^2}{t}$. Siis $f''(x) \geqslant 0$ ja $f''(x) = 0$ vain, kun $e^x = 1$ eli kun $x = 0$. (Olisi voitu myös suoraan huomata, että $f''(x) = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2$.)

Siis $f'(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava. Koska $f'(0) = 0$, niin $f'(x) < 0$, kun $x < 0$, ja $f'(x) > 0$, kun $x > 0$. Siis funktion f pienin arvo on $f(0) = 0$, joten $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x.

Suurin ja pienin arvo – sovelluksia

505. $\frac{1}{e}$ (Jos x-akselilla olevan sivun toinen päätepiste on $(x, 0)$, niin suorakulmion pinta-ala on $A(x) = xe^{-x}$, missä $x > 0$. Derivaattafunktiolla $A'(x) = (1 - x)e^{-x}$ on nollakohta $x = 1$. Kulkukaaviosta (lauseke $1 - x$ määrää derivaatan merkin) nähdään, että $A(1)$ on funktion A suurin arvo.)

506. korkeus 13,3 cm ja pohjan halkaisija 17,0 cm
(Olkoon r (cm) pohjaympyrän säde ja h (cm) lieriön korkeus, jolloin tilavuus $V = \pi r^2 h$.
Koska rautalangan määrä on 160 (cm), niin $2 \cdot 2\pi r + 4h = 160$.
Valitaan muuttujaksi r (koska tilavuuden kaavassa r korotetaan neliöön).
Tällöin $h = 40 - \pi r$ ja $V(r) = \pi r^2(40 - \pi r)$, missä muuttuja r on suljetulla välillä $[0, \frac{40}{\pi}]$.

Välillä $]0, \frac{40}{\pi}[$ on derivaattafunktion $V'(r) = \pi(80r - 3\pi r^2)$ nollakohta $\frac{80}{3\pi}$.

Suurin arvo perustellaan kulkukaaviolla tai laskemalla funktion V arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä.)

507. 1 (Origokeskisellä yksikköympyrällä on $x^2 + y^2 = 1$ ja siis $x^2 = 1 - y^2$. Määritetään funktion $f(y) = y - 3(1 - y^2)y = -2y + 3y^3$ suurin arvo suljetulla välillä $[-1, 1]$.)

508. sekä pohjan säde että korkeus 6,8 cm
(Valitaan yksiköksi desimetri. Merkitään lieriön pohjan sädettä r ja lieriön korkeutta h.
Paino on suoraan verrannollinen tölkin pinta-alaan $A = \pi r^2 + 2\pi rh$.

Koska tölkin tilavuus $\pi r^2 h = 1$, niin $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

Pinta-ala muuttujan r funktiona on

$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2}{r}$, missä $r > 0$.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $A(r)$ saa pienimmän arvon derivaattafunktion

$A'(r) = 2\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$ nollakohdassa

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0{,}683$ (dm).

Edelleen määritetään $h = \frac{1}{\pi r^2}$.)

509. kadun suuntaisten sivujen pituus 29 m, toisten sivujen pituus 40 m
(Olkoot s (m) talon kadun suuntaisen sivun pituus ja t kohtisuora pituus.
Tontin pinta-ala on tällöin $(s + 10)(t + 14)$.

Koska $st = 490$, niin $t = \frac{490}{s}$ ja

$A(s) = (s + 10)(\frac{490}{s} + 14)$

$= 14s + \frac{4900}{s} + 630$, missä $s > 0$.

Derivaattafunktiolla

$A'(s) = 14 - \frac{4900}{s^2} = \frac{14s^2 - 4900}{s^2}$

on välillä $]0, \infty[$ nollakohta $s = \sqrt{350} \approx 18{,}7$, ja kulkukaaviosta nähdään, että funktio $A(s)$ saa tässä kohdassa pienimmän arvon.
Pienimmän tontin kadun suuntaisten sivujen pituus on $\sqrt{350} + 10 \approx 29$ (m) ja toisten sivujen pituus $\frac{490}{\sqrt{350}} + 14 \approx 40$ (m).

Voidaan myös merkitä tontin sivuja s (kadun suuntainen) ja t, jolloin $(s - 10)(t - 14) = 490$, $t = \frac{490}{s - 10} + 14$ ja $A(s) = st = \frac{490s}{s - 10} + 14s$, missä $s > 10$. Derivaattafunktio on

$A'(s) = -\frac{4900}{(s - 10)^2} + 14$.)

510. Piste, jonka etäisyys kannasta on $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

(Olkoon x korkeusjanalla olevan pisteen etäisyys kolmion kannasta. Pisteen etäisyys kannan päätepisteistä on $\sqrt{x^2 + 5^2}$ ja huipusta $13 - x$. Etäisyyksien summa on $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 25} + 13 - x$, missä muuttuja x on välillä $[0, 13]$. Derivaattafunktion $f'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 25}}{\sqrt{x^2 + 25}}$ nollakohdat saadaan yhtälöstä $2x = \sqrt{x^2 + 25}$, joka, koska $x \geqslant 0$, on yhtäpitävä neliöön korotetun yhtälön $4x^2 = x^2 + 25$ kanssa. Välillä $]0, 13[$ on derivaattafunktion nollakohta $\frac{5}{\sqrt{3}}$. Lasketaan funktion f arvot $f(\frac{5}{\sqrt{3}})$, $f(0)$ ja $f(13)$.)

511. 3,1 metrin etäisyydellä himmeämmästä valonlähteestä (Olkoon x (m) etäisyys himmeämmästä valonlähteestä. Valaistus on tällöin $\frac{k}{x^2} + \frac{4k}{(8{,}0 - x)^2}$, missä $k > 0$ on verrannollisuuskerroin ja $0 < x < 8{,}0$.
Valaistus on heikoin, kun funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{(8{,}0 - x)^2}$ arvo on pienin.
Derivaattafunktion $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{8}{(8{,}0 - x)^3}$ arvo on 0, kun $4x^3 = (8{,}0 - x)^3$ eli $\sqrt[3]{4}\,x = 8{,}0 - x$ eli $x = \frac{8{,}0}{1 + \sqrt[3]{4}} \approx 3{,}1$ (m).
Kulkukaavion avulla nähdään, että funktio f saa pienimmän arvon derivaattafunktion nollakohdassa.)

512. $(-\frac{1}{2}, -\ln 2)$ (Kolmion pinta-ala on pienin, kun kolmas kärki on käyrän $y = \ln(1 + x)$ piste, jonka etäisyys pisteiden $(1, 3)$ ja $(2, 5)$ kautta kulkevasta suorasta (kolmion korkeus) on pienin. Suoran yhtälö on $y = 2x + 1$ eli $2x - y + 1 = 0$, ja käyrän pisteen $(x, \ln(1 + x))$ etäisyys suorasta on $\frac{|2x - \ln(1 + x) + 1|}{\sqrt{5}}$.
Käyrä $y = \ln(1 + x)$ on suoran alapuolella, missä pätee $y < 2x + 1$ eli $2x - y + 1 > 0$.
Siis etäisyys on $\frac{1}{\sqrt{5}}(2x - \ln(1 + x) + 1)$.
Kulkukaavion avulla nähdään, että funktio $f(x) = 2x - \ln(1 + x) + 1$, missä $x > -1$, saa pienimmän arvon derivaattafunktion $f'(x) = 2 - \frac{1}{1 + x} = \frac{2x + 1}{1 + x}$ nollakohdassa $-\frac{1}{2}$.)

513. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ja $(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$ (Määritetään paraabelin $y = x^2$, missä $-2 \leqslant x \leqslant 1$, piste, joka on lähinnä suoraa $y = -x - 1$. Sen jälkeen suoralla oleva piste saadaan paraabelin pisteen kautta kulkevan suoran $y = -x - 1$ normaalin ja suoran $y = -x - 1$ leikkauspisteenä.
Tapa 1. Paraabelin $y = x^2$ pisteen (x, x^2) etäisyys suorasta $x + y + 1 = 0$ on $\frac{|x + x^2 + 1|}{\sqrt{2}}$.
Paraabeli on suoran yläpuolella, missä pätee $y \geqslant -x - 1$ eli $x + y + 1 \geqslant 0$. Siis etäisyys on $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + x^2 + 1)$. Funktio f saa välillä $[-2, 1]$ pienimmän arvonsa kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.
Lähin paraabelin piste on $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
Tapa 2. Kuvion tuella havaitaan, että lähin paraabelin piste on piste, johon piirretty paraabelin tangentti on suoran $y = -x - 1$ suuntainen. Suoran kulmakerroin on -1, ja muuttujan arvon x kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $2x$. Tulee siis olla $2x = -1$ eli $x = -\frac{1}{2}$.)

514. pisteet $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2})$ ja $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2})$

(Pisteen $(0, 3)$ ja paraabelilla olevan pisteen (x, x^2) etäisyyden neliö on
$f(x) = (x-0)^2 + (x^2-3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$, missä x on mikä tahansa reaaliluku.
$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) = 0$, kun
$x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ tai $x = 0$ tai $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$.
Kulkukaaviosta nähdään, että etäisyys on pienin, kun $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ tai $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$.)

515. Särmiö on kuutio, jonka särmien pituus on $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (Jos särmiön pohjasärmä on a ja korkeus h, niin särmiön tilavuus on $V = a^2h$.
Leikataan kappaleet tasolla, joka kulkee särmiön kahden vastakkaisen pystysärmän kautta. Kuviossa on 1-säteisen ympyrän sisällä suorakulmio, jonka sivut ovat $a\sqrt{2}$ ja h.
Saadaan $(a\sqrt{2})^2 + h^2 = 2^2$ eli $2a^2 + h^2 = 4$.
Valitaan muuttujaksi h (jos muuttuja olisi a, niin V:n lausekkeeseen jäisi neliöjuuri), jolloin
$a^2 = \frac{1}{2}(4 - h^2)$ ja
$V(h) = \frac{1}{2}(4 - h^2)h = \frac{1}{2}(4h - h^3)$, missä $0 \leqslant h \leqslant 2$. Välillä $]0, 2[$ on derivaattafunktion $V'(h) = \frac{1}{2}(4 - 3h^2)$ nollakohta $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
Suurin arvo perustellaan laskemalla funktion V arvo derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä tai laatimalla kulkukaavio (derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli). Edelleen saadaan särmiön pohjasärmän pituudeksi myös $\frac{2}{\sqrt{3}}$.)

516. $\frac{16}{27\pi} \approx 0{,}19$ (Merkitään pallon sädettä R.
Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3}a^2h$, missä a on pohjasärmän pituus ja h pyramidin korkeus. Voidaan olettaa, että $h \geqslant R$. Valitaan muuttujaksi h (koska tilavuuden kaavassa a tullaan korottamaan neliöön ja Pythagoraan lauseesta johtuva neliöjuuri tulee häviämään).
Pohjaneliön lävistäjän puolikas on tällöin $\sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$ ja pohjaneliön sivun pituus $a = \sqrt{2}\sqrt{2Rh - h^2}$.
Pyramidin tilavuus on
$V = \frac{2}{3}(2Rh - h^2)h = \frac{2}{3}(2Rh^2 - h^3)$,
missä $R \leqslant h \leqslant 2R$.
Derivaattafunktiolla $V'(h)$ on välillä $]R, 2R[$ nollakohta $h = \frac{4}{3}R$.

Koska $V(\frac{4R}{3}) = \frac{64R^3}{81} \approx 0{,}79\,R^3$,

$V(R) = \frac{2R^3}{3} \approx 0{,}67\,R^3$ ja $V(2R) = 0$,

suurin tilavuus on $\frac{64R^3}{81}$.

Suhde on $\frac{64R^3}{81} : \frac{4\pi R^3}{3}$.

Muuttujaksi voidaan valita myös pyramidin pohjan etäisyys pallon keskipisteestä.)

517. pohjan säde $\sqrt{2}\,R$ ja korkeus $4R$

(Olkoon r kartion pohjan säde ja h kartion korkeus. Tällöin kartion tilavuus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Pallo sivuaa kartion pohjaa ja vaippaa, ja pallon keskipiste on kartion akselilla. Leikataan kappaleet tasolla, joka kulkee pitkin kartion akselia. Muodostuvassa kuviossa on tasakylkinen kolmio ja sen sisään piirretty R-säteinen ympyrä. Yhteys säteen r ja korkeuden h välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista.

Kolmion kyljen pituus on $\sqrt{r^2 + h^2}$. Tällöin

$\frac{R}{r} = \frac{h - R}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ eli $\frac{R^2}{r^2} = \frac{(h-R)^2}{r^2 + h^2}$ eli

$R^2 r^2 + R^2 h^2 = r^2 (h - R)^2$.

Yhtälöstä on yksinkertaisinta ratkaista r^2, joten valitaan muuttujaksi h, jolloin

$$r^2 = \frac{R^2 h^2}{(h-R)^2 - R^2} = \frac{R^2 h^2}{h^2 - 2hR} = \frac{R^2 h}{h - 2R}.$$

Siis $V(h) = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 h}{h - 2R} h = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h^2}{h - 2R}$.

Muuttujan h arvot ovat välillä $]2R, \infty[$.

Funktion $V(h)$ arvo on suurin, kun funktion

$f(h) = \frac{h^2}{h - 2R}$ arvo on suurin.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f(h)$ saa suurimman arvon derivaattafunktion $f'(h)$ nollakohdassa $4R$. Tällöin $r^2 = 2R^2$ ja $r = \sqrt{2}\,R$.)

518. suoran yhtälö $y = -\frac{3}{2}x + 6$, kolmion pinta-ala 12

(Valitaan muuttujaksi suoran kulmakerroin. Suoran tulee olla laskeva, joten $k < 0$. Suoran yhtälö on $y - 3 = k(x - 2)$, ja suora leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $(\frac{2k-3}{k}, 0)$ ja $(0, 3 - 2k)$.

Kolmion pinta-ala on

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k-3}{k} \cdot (3 - 2k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2k-3)^2}{k},$$

missä $k < 0$. Derivaattafunktion

$A'(k) = -\frac{4k^2 - 9}{2k^2}$ negatiivinen nollakohta on

$k = -\frac{3}{2}$. Kulkukaavion avulla perustellaan, että funktio $A(k)$ saa kohdassa $k = -\frac{3}{2}$ pienimmän arvon. Suoran yhtälö on tällöin

$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$ ja suora leikkaa x-akselin pisteessä $(4, 0)$ ja y-akselin pisteessä $(0, 6)$.

Voidaan myös valita muuttujaksi suoran ja x-akselin välinen terävä kulma t radiaaneina. Tällöin

$$A(t) = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \tan t + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{\tan t}$$

$$= 6 + 2 \tan t + \frac{9}{2} \cdot \frac{\cos t}{\sin t}, \text{ missä } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Derivaattafunktion

$$A'(t) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{4 \sin^2 t - 9 \cos^2 t}{2 \cos^2 t \sin^2 t}$$ arvo on 0, kun $\tan^2 t = \frac{9}{4}$.

Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on $\tan t > 0$, joten $\tan t = \frac{3}{2}$.

Yhtälöllä on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ yksi juuri $t_0 \approx 0{,}983$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $A(t)$ saa kohdassa t_0 suurimman arvonsa.

Siis pinta-ala on suurin, kun $\tan t = \frac{3}{2}$, jolloin suoran kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$.)

519. pisteeseen $(1, \frac{1}{e})$ (Käyrän $y = e^{-x}$ pisteeseen (a, e^{-a}) piirretyn tangentin yhtälö on $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$. Tangentti leikkaa y-akselin pisteessä $(0, (1 + a)e^{-a})$ ja x-akselin pisteessä $(1 + a, 0)$. Koordinaatiston ensimmäiseen neljännekseen muodostuu kolmio, kun $a \geqslant -1$. Kolmion pinta-ala on $A(a) = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}$. Derivaattafunktion

$A'(a) = (1 + a)e^{-a} - \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}$

$= \frac{1}{2}(1 - a^2)e^{-a}$ nollakohdat ovat -1 ja 1.

Kulkukaaviosta, joka perustellaan laskemalla derivaattafunktion arvoja tai huomaamalla, että merkki riippuu ainoastaan toisen asteen lausekkeen $1 - a^2$ merkistä, havaitaan, että pinta-ala on suurin, kun $a = 1$.)

520. koko matka kovalla maalla suon reunaa pitkin (Oletetaan, että juoksija juoksee ensin suolla ympyrän jänteen, jota vastaava keskuskulma on $2x$ (radiaania), missä $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Loppumatka pitkin suon reunaa on kaari, jonka keskuskulma on $\pi - 2x$. Jänteen pituus on $2 \cdot \frac{1}{2}\sin x = \sin x$ ja

kaaren pituus $\frac{\pi - 2x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - x$.

Matkaan kuluva aika on

$f(x) = \sin x : 5 + (\frac{\pi}{2} - x) : 10$

$= \frac{1}{5}\sin x + \frac{\pi}{20} - \frac{x}{10}$ (h).

Derivaattafunktiolla $f'(x) = \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}$

on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ nollakohta $\frac{\pi}{3}$.

Koska $f(\frac{\pi}{3}) \approx 0{,}23$, $f(0) = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}16$ ja

$f(\frac{\pi}{2}) = 0{,}2$, funktion f arvo on pienin, kun $x = 0$.)

521. $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360° \approx 293{,}94°$ (Valitaan muuttujaksi x kulman AOB suuruus radiaaneina, jolloin sektorin kaaren pituus on x. Muuttuja x on välillä $[0, 2\pi]$. Sektorin kaari kiertyy kartion pohjaympyräksi, joten pohjaympyrän säde on $\frac{x}{2\pi}$. Ympyrän säteestä tulee kartion sivujana, joten kartion korkeus on

$\sqrt{1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Kartion tilavuus on

$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (\frac{x}{2\pi})^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$= \frac{1}{24\pi^2} \cdot x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$= \frac{1}{24\pi^2}\sqrt{x^4(4\pi^2 - x^2)}$.

Funktion $V(x)$ arvo on suurin, kun funktion $f(x) = x^4(4\pi^2 - x^2) = 4\pi^2 x^4 - x^6$ arvo on suurin. Derivaattafunktiolla $f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5 = x^3(16\pi^2 - 6x^2)$ on välillä $]0, 2\pi[$ nollakohta $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lasketaan funktion f arvo tässä kohdassa ja välin päätepisteissä tai laaditaan kulkukaavio. Koska π radiaania on $180°$ astetta, kulman suuruus asteina on $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360°$.)

522. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Merkitään $AB = a$ ja $BC = b$. Valitaan muuttujaksi janan BE pituus x. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{CF}{b-x} = \frac{a}{x}$ eli $CF = \frac{a(b-x)}{x}$. Kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on $A(x) = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}\frac{a(b-x)^2}{x}$ $= \frac{1}{2}a(x + \frac{(b-x)^2}{x})$, missä $0 < x < b$.
Pinta-ala on pienin, kun funktion $f(x) = x + \frac{(b-x)^2}{x} = 2x + \frac{b^2}{x} - 2b$, missä muuttuja x on välillä $]0, b]$, arvo on pienin.
Derivaattafunktiolla $f'(x) = 2 - \frac{b^2}{x^2} = \frac{2x^2 - b^2}{x^2}$ on välillä $]0, b[$ nollakohta $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$.
Derivaattafunktion merkki voidaan päätellä esimerkiksi ylöspäin aukeavan paraabelin $y = 2x^2 - b^2$ merkeistä.)

523. (7,71; 0)
(*Tapa 1.* Valitaan muuttujaksi terävä kulma x (radiaania), jonka oikotie muodostaa x-akselin kanssa. Tien pituus on $f(x) = \frac{2}{\sin x} + \frac{5}{\cos x}$, missä $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Derivaattafunktion $f'(x)$ $= -\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{5\sin x}{\cos^2 x} = \frac{-2\cos^3 x + 5\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ arvo on 0, kun $-2\cos^3 x + 5\sin^3 x = 0$ eli kun $\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{2}{5}$ eli $\tan x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$. Derivaattafunktiolla on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ nollakohta, jonka likiarvo on $x_0 \approx 0{,}635$, ja kulkukaavion avulla nähdään, että funktio f saa kohdassa x_0 pienimmän arvon. Lähtöpaikan koordinaatti x-akselilla on $5 + \frac{2}{\tan x_0} = 5 + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 7{,}71$.

Tapa 2. Valitaan muuttujaksi lähtöpisteen x-koordinaatti x. Jos päätepiste on $(0, y)$, niin tien pituuden neliö on $x^2 + y^2$. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{y}{x} = \frac{2}{x-5}$, josta $y = \frac{2x}{x-5}$. Tien pituuden neliö muuttujan x funktiona on $f(x) = x^2 + \frac{4x^2}{(x-5)^2}$, missä $x > 5$. Derivaattafunktion
$f'(x) = 2x + \frac{8x \cdot (x-5)^2 - 4x^2 \cdot 2(x-5) \cdot 1}{(x-5)^4}$
$= 2x - \frac{40x}{(x-5)^3} = \frac{2x(x-5)^3 - 40x}{(x-5)^3}$
$= \frac{2x((x-5)^3 - 20)}{(x-5)^3}$ arvo on 0, kun
$x = 0$ tai $(x-5)^3 - 20 = 0$.
Derivaattafunktiolla on välillä $]5, \infty[$ nollakohta $5 + \sqrt[3]{20} \approx 7{,}71$. Kulkukaaviosta nähdään, että tässä kohdassa funktio f saa pienimmän arvon.)

524. korkeudelle $\frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71r$ (Valitaan muuttujaksi x (radiaania) valon tulosuunnan ja pöydän normaalin välinen kulma pöydän reunalla. Tällöin valonlähteen etäisyys pöydän reunasta on $\frac{r}{\sin x}$. Valaistuksen voimakkuus on $k\cos x \cdot \left(\frac{\sin x}{r}\right)^2$, missä $k > 0$ on verrannollisuuskerroin. Tutkitaan funktiota $f(x) = \cos x \sin^2 x$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Derivaattafunktion $f'(x) = -\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x$
$= -\sin^3 x + 2(1 - \sin^2 x)\sin x$
$= \sin x(2 - 3\sin^2 x)$ arvo on nolla, kun
$\sin x = 0$ tai $\sin^2 x = \frac{2}{3}$. Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on yksi nollakohta $x_1 \approx 0{,}955$, jolle $\sin x_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Perustellaan suurin arvo esimerkiksi derivaatan merkeillä. Valonlähde on tällöin korkeudella $\frac{r}{\tan x_1} = \frac{r}{\sqrt{2}}$.)

525. 6,0 cm (Kartion korkeus on 8,8 cm. Valuvan vesimäärän tilavuus on pallon säteestä riippuen pallosegmentin tilavuus tai koko pallon tilavuus. Suurimman vaippaa sivuavan pallon säde r saadaan yhdenmuotoista kolmioista:

$\frac{r}{6{,}6} = \frac{11{,}0}{8{,}8}$, josta $r = 8{,}25$. Olkoon d pallon keskipisteen etäisyys kartion huipusta, kun $r \leqslant 8{,}25$. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan: $\frac{r}{6{,}6} = \frac{d}{11{,}0}$, joten $d = \frac{5}{3}r$. Kun $d + r \leqslant 8{,}8$ eli kun $r \leqslant 3{,}3$, pallo on kokonaan kartion sisällä (ja pienenee), joten voidaan olettaa, että $3{,}3 \leqslant r \leqslant 8{,}8$. Pallon pystysuorasta halkaisijasta jää kartion ulkopuolelle osa, jonka pituus on $d + r - 8{,}8$, joten pallon sisällä olevan segmentin korkeus on

$h = 2r - (d + r - 8{,}8) = r - d + 8{,}8$

$= r - \frac{5}{3}r + 8{,}8 = 8{,}8 - \frac{2}{3}r.$

Segmentin tilavuus on

$V(r) = \pi h^2(r - \frac{h}{3}) = \pi(8{,}8 - \frac{2}{3}r)^2(\frac{11}{9}r - \frac{8{,}8}{3})$

ja tilavuus on suurin, kun

$f(r) = (8{,}8 - \frac{2}{3}r)^2(\frac{11}{9}r - \frac{8{,}8}{3})$ on suurin.

Derivoidaan korottamatta neliöön:

$f'(r) = 2(8{,}8 - \frac{2}{3}r) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (\frac{11}{9}r - \frac{8{,}8}{3})$

$+ (8{,}8 - \frac{2}{3}r)^2 \cdot \frac{11}{9}$. Sieventämällä saadaan

$f'(r) = (8{,}8 - \frac{2}{3}r)(-\frac{22}{9}r + \frac{44}{3}).$

Derivaattafunktion nollakohdista välillä $[3{,}3;\ 8{,}8]$ on nollakohta $r = 6$. Suurin arvo perustellaan esimerkiksi kulkukaavion avulla.)

526. soutusuunta 27° alavirran suuntaan nähden, rantautumiskohta 2,1 km alavirtaan ja kuluva aika 56 min

(Olkoon x (radiaania) kulma, jonka veneen suunta muodostaa rannan suunnan kanssa (alavirtaan). Tällöin $0 < x < \pi$. Ajassa t vene kulkee joen poikkisuuntaan $t \cdot 3{,}2 \sin x$ (km) ja alavirtaan veteen nähden $t \cdot 3{,}2 \cos x$ (km).

Joen ylitykseen kuluva aika on $\frac{0{,}6}{3{,}2 \sin x}$ (h).

Matka, jonka vene tässä ajassa kulkee alavirtaan, on

$s(x) = \frac{0{,}6}{3{,}2 \sin x} \cdot 3{,}2 \cos x + \frac{0{,}6}{3{,}2 \sin x} \cdot 2{,}3$

$= \frac{0{,}6 \cos x}{\sin x} + \frac{1{,}38}{3{,}2 \sin x}$ (km),

joten kävelymatkaa jää $5{,}2 - s(x)$ ja kävelymatkaan kuluva aika on

$(5{,}2 - s(x)) : 5{,}9$

$= \frac{5{,}2}{5{,}9} - \frac{0{,}6 \cos x}{5{,}9 \sin x} - \frac{1{,}38}{18{,}88 \sin x}$ (h).

Koko matkaan kuluva aika on $f(x)$

$= \frac{0{,}6}{3{,}2 \sin x} + \frac{5{,}2}{5{,}9} - \frac{0{,}6 \cos x}{5{,}9 \sin x} - \frac{1{,}38}{18{,}88 \sin x}$.

Derivaattafunktiolla

$f'(x) = -\frac{0{,}6 \cos x}{3{,}2 \sin^2 x} + \frac{0{,}6}{5{,}9 \sin^2 x} + \frac{1{,}38 \cos x}{18{,}88 \sin^2 x}$

$= \frac{-2{,}16 \cos x + 1{,}92}{18{,}88 \sin^2 x}$ on välillä $]0, \pi[$ yksi nollakohta $x_0 \approx 0{,}47588$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f saa tässä kohdassa pienimmän arvon. Kulma x_0 on asteissa

$\frac{x_0}{\pi} \cdot 180° \approx 27°$, rantautumiskohta on $s(x_0) \approx 2{,}1$ (km) alavirtaan ja matkaan kuluva aika on $f(x_0) \approx 0{,}9338$ (h).)

527. välillä $[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ (Merkitään janan keskipistettä (x, y). Koska toinen päätepiste on y-akselilla, niin suoralla $y = x$ olevan päätepisteen x-koordinaatti on $2x$ ja päätepiste on siis $(2x, 2x)$. Ratkaisemalla a yhtälöstä $\frac{a + 2x}{2} = y$ saadaan y-akselilla olevan päätepisteen y-koordinaatti $a = 2y - 2x$. Janan päätepisteet ovat siis $(0, 2y - 2x)$ ja $(2x, 2x)$. Koska janan pituus on 4, niin $(2x)^2 + (4x - 2y)^2 = 16$ eli keskipiste on käyrällä $5x^2 - 4xy + y^2 = 4$. Ratkaisemalla yhtälöstä y saadaan $y = 2x + \sqrt{4 - x^2}$ tai $y = 2x - \sqrt{4 - x^2}$. Suurin mahdollinen y:n arvo on ensimmäisen lausekkeen suurin arvo välillä $[0, 2]$ ja pienin mahdollinen arvo jälkimmäisen lausekkeen pienin arvo välillä $[-2, 0]$. Arvot ovat toistensa vastalukuja, joten määritetään funktion $f(x) = 2x + \sqrt{4 - x^2}$ suurin arvo välillä $[0, 2]$. Välillä $]0, 2[$ on derivaattafunktion nollakohta $\frac{4}{\sqrt{5}}$, ja koska $f(\frac{4}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{5}$, $f(0) = 2$ ja $f(2) = 4$, niin arvo $2\sqrt{5}$ on suurin.)

Integraalilaskenta

528. On, sillä $f'(x) = g(x)$.

529. $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$

$(g'(x) = 2Ax \ln x + Ax + 2Bx$
$= 2Ax \ln x + (A + 2B)x.$
Tulee olla $2A = 1$ ja $A + 2B = 0.)$

530. $4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$

$(\int (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2})dx = \int (2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2})dx$

$= 2 \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + (-1)\, x^{-1} + C)$

531. a) $F(x) = -x^2 + 6x - 9$ (Funktion f integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = -x^2 + 6x + C$. Tulee olla $F(1) = -4.$)

b) $F(x) = -x^2 + 6x - 4$ (Integraalifunktion $F(x) = -x^2 + 6x + C$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio F saa suurimman arvon derivaattafunktion $f(x) = -2x + 6$ nollakohdassa 3. Tulee olla $F(3) = 5.$)

532. $F(x) = x + \ln(-x) + 2$ (Integroimalla saadaan $F(x) = x + \ln|x| + C = x + \ln(-x) + C$, sillä $x < 0$. $F(-1) = -1 + \ln 1 + C = -1 + C = 1$, kun $C = 2.$)

533. $-2\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 6x + C$

534. $-3e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

$(\int \frac{3 + e^{3x}}{e^x}\, dx = \int (3e^{-x} + e^{2x})dx)$

535. a) $\frac{1}{6}(x + 1)^6 + C$

b) $\frac{1}{18}(3x + 1)^6 + C$ $(\int (3x + 1)^5\, dx$

$= \frac{1}{3}\int 3(3x + 1)^5\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(3x + 1)^6 + C)$

536. a) $\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$

$(\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx)$

b) $-\frac{1}{12(3x+1)^4}+C$

$(\int \frac{1}{(3x+1)^5}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x+1)^{-5}\,dx$

$= \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(3x+1)^{-4}+C)$

537. $\frac{9}{10}$ $(\int_0^1 x(\sqrt{x}+1)dx = \int_0^1 (x\sqrt{x}+x)dx$

$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+x)dx = \Big/_0^1 (\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2)$

$= \Big/_0^1 (\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2))$

538. $e+1$ $(\int_1^e \frac{x+2}{x}\,dx = \int_1^e (1+\frac{2}{x})dx$

$= \Big/_1^e (x+2\ln|x|))$

539. $\frac{7}{24}$ $(\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-x^{-1})^2\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-\frac{1}{x})^2\,dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2-2+\frac{1}{x^2})dx = \Big/_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}))$

540. e^2+4-e^{-2} $(\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})^2\,dx$

$= \int_{-1}^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})dx$

$= \Big/_{-1}^1 (\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}))$

541. $2\frac{1}{2}$ $(\int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = 2+\frac{1}{2}$.

Integraalin arvo voidaan laskea myös geometrisesti, sillä se ilmaisee kahden suorakulmaisen kolmion pinta-alan.)

542. $4\ln 2 \approx 2{,}8$ (Alue on x-akselin alapuolella, joten $A = -\int_{-6}^{-3} \frac{4}{x}\,dx = -4\Big/_{-6}^{-3} \ln|x|$

$= 4(\ln 6 - \ln 3) = 4\ln\frac{6}{3}$.)

543. $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ (Käyrä $x = y^2+y$ on oikealle aukeava paraabeli, joka leikkaa y-akselin pisteissä $(0,-1)$ ja $(0,0)$. Koska alue on y-akselin vasemmalla puolella, pinta-ala on määrätyn integraalin $\int_{-1}^0 (y^2+y)dy$ vastaluku.)

544. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}15$

(Alue on x-akselin yläpuolella. Kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä $(\ln\frac{1}{2}, 0)$.

$A = \int_{\ln\frac{1}{2}}^0 (e^x-\frac{1}{2})dx = \Big/_{\ln\frac{1}{2}}^0 (e^x-\frac{1}{2}x)$

$= (1-0)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2})$.)

545. 12 (Käyrä $y = x^3+1$ on ylempänä, joten $A = \int_1^5 ((x^3+1)-(x^3-2))dx = \int_1^5 3\,dx$.)

546. $\frac{1}{12}$ (Yhtälöstä $x^3 = x^2$ saadaan leikkauspisteiden x-koordinaatit 0 ja 1. Välillä $[0,1]$ on $x^2 > x^3$, joten $A = \int_0^1 (x^2-x^3)dx$.)

547. $\frac{1}{2}\pi(e^4 - e^2) \approx 74{,}2$

$(V = \pi \int_1^2 (-e^x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 e^{2x} \,\mathrm{d}x)$

548. a) $\frac{243\pi}{5} \approx 152{,}7$

$(V = \pi \int_0^3 (x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^3 x^4 \,\mathrm{d}x)$

b) $\frac{81\pi}{2} \approx 127{,}2$ (Integroidaan y:n suhteen.

Koska $y = x^2$ ja $0 \leqslant x \leqslant 3$, niin $x = \sqrt{y}$.

Rajat ovat $0^2 = 0$ ja $3^2 = 9$.

$V = \pi \int_0^9 (\sqrt{y})^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^9 y \,\mathrm{d}y.)$

549. $\frac{11}{4} + \ln 4 \quad (\int_1^4 (\frac{1 + 2\sqrt{x} + x}{x^2})\mathrm{d}x$

$= \int_1^4 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{2}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

$= \Big/_1^4 -\frac{1}{x} - 4 \Big/_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + \Big/_1^4 \ln|x|)$

550. $\frac{10}{3} \quad (\int_0^{\ln 2} (e^{3x} + 2e^{-x})\mathrm{d}x = \Big/_0^{\ln 2} (\frac{1}{3}e^{3x} - 2e^{-x})$

$= (\frac{1}{3}e^{3\ln 2} - 2e^{-\ln 2}) + \frac{5}{3}$

$= \frac{1}{3}e^{\ln 2^3} - \frac{2}{e^{\ln 2}} + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3})$

551. $\frac{1}{2(r+1)} \quad (\int_0^1 (1 - x^2)^r x \,\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(1 - x^2)^r \,\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2} \Big/_0^1 \frac{1}{r+1}(1 - x^2)^{r+1})$

552. $\frac{\pi}{2} + 1 \quad ((\cos x + \sin x)^2$

$= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

$= 1 + 2\cos x \sin x$. Siis

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 \,\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \sin x \,\mathrm{d}x$

$= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} x + \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.$

Jälkimmäinen integraali lasketaan funktion potenssin integroimiskaavalla.)

553. $-\frac{2}{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \quad (\int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - 3x}}$

$= \int_0^{-1} (2 - 3x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \int_0^{-1} (-3)(2 - 3x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{3} \Big/_0^{-1} 2(2 - 3x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \Big/_0^{-1} \sqrt{2 - 3x})$

554. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + x - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3}$ (Integraalifunktiolle $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + x + C$ on

$F(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + C = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3} + C.)$

555. $a = \frac{2}{3}$ (Funktion f integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + C$, missä C on vakio. Vakio a ratkaistaan yhtälöparista $F(-1) = 0$ ja $F(1) = 2$.)

556. $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{5}{3}$ (Tulee olla $F'(x) = f(x)$ koko välillä $]-2, 1[$.

$$F'(x) = -\frac{A}{1-x} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2 + x - 2}.$$

F' ja f ovat sama funktio, kun $A + B = 3$ ja $2A - B = 1$, josta yhtälöparista ratkaistaan A ja B.)

557. $3\frac{1}{2}$ (Välillä $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ on $\frac{1+x}{x^3} > 0$, joten

$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x^3}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2})dx$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (x^{-3} + x^{-2})dx = \Big/_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (-\frac{1}{2}x^{-2} + (-1)x^{-1})$$

$$= \Big/_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}).)$$

558. 660 m^3 (Sijoitetaan poikkileikkaus koordinaatistoon niin, että huippu on y-akselilla pisteessä $(0, 3)$. Paraabelin yhtälö on tällöin muotoa $y = ax^2 + 3$. Koska paraabeli leikkaa x-akselin pisteissä $(-3, 0)$ ja $(0, 3)$, niin

$9a + 3 = 0$ ja $a = -\frac{1}{3}$.

Poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A = \int_{-3}^{3} (-\frac{1}{3}x^2 + 3)dx = 2\int_{0}^{3} (-\frac{1}{3}x^2 + 3)dx = 12$$

ja vallin tilavuus

$V = Ah = 12 \cdot 55 = 660$ (m^3).)

559. $f(x) = x + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$ (Kaikilla x on $f'(x) = 1 - e^{-2x}$, joten $f(x) = x + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$.

Derivaattafunktion $f'(x) = 1 - e^{-2x}$ nollakohta on $x = 0$, ja kulkukaavion mukaan funktio f saa tässä kohdassa pienimmän arvon.

Tulee siis olla $f(0) = 2$ eli $0 + \frac{1}{2} + C = 2$.)

560. $k = \frac{1}{12}$ (Lasketaan leikkauspisteiden x-koordinaatit: $kx^2 = \frac{1}{2}x$, kun $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2k}$.

Koska paraabeli $y = kx^2$ $(k > 0)$ aukeaa ylöspäin, aluetta rajaa yläpuolelta suora ja alapuolelta paraabeli.

$$A = \int_{0}^{\frac{1}{2k}} (\frac{1}{2}x - kx^2)dx$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{1}{2k}} (\frac{1}{4}x^2 - \frac{k}{3}x^3) = \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Ratkaistaan yhtälö $\frac{1}{48} \cdot \frac{1}{k^2} = 3$.)

561. $\frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$ (Kun $x \geqslant 0$, niin ensimmäinen käyrä on $y = x^2 + 3$, joka leikkaa käyrän $y = x^2 + x$, kun $x = 3$. Rajautuvan alueen pinta-ala on $A_1 = \int_0^3 (3 - x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$.

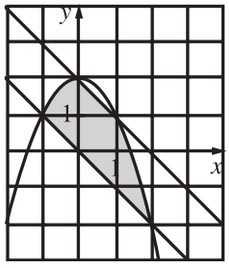
Kun $x \leqslant 0$, niin ensimmäinen käyrä on $y = -x^2 + 3$. Yhtälöllä $-x^2 + 3 = x^2 + x$ on negatiivinen juuri $x = -\frac{3}{2}$.

Rajautuvan alueen pinta-ala on

$$A_2 = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} (-2x^2 - x + 3)\mathrm{d}x = \frac{27}{8}.$$

Kysytty pinta-ala on $A_1 + A_2$.)

562. $\frac{13}{3}$



(Alue on paraabelin $y = 2 - x^2$ alla olevasta alueesta suorien $y = -x + 2$ ja $y = -x$ väliin jäävä osa. Ensimmäinen suora leikkaa paraabelin pisteissä $(1, 1)$ ja $(0, 2)$ ja toinen suora pisteissä $(2, -2)$ ja $(-1, 1)$. Alueen pinta-ala saadaan vähentämällä paraabelin ja suoran $y = -x$ väliin jäävän alueen pinta-alasta $\int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\mathrm{d}x$ paraabelin ja suoran $y = -x + 2$ väliin jäävän alueen ala $\int_0^1 (-x^2 + x)\mathrm{d}x$.)

563. 1,6 kg (Alue on symmetrinen x-akselin suhteen. Suora $y = 4$ leikkaa paraabelin pisteessä $(17, 4)$. Suoran $y = 4$ välillä $[0, 17]$ olevan osan pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy lieriö, jonka tilavuus on $V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 17 = 272\pi$ (cm^3).

Koska $x = 1 + y^2$, niin $y = \sqrt{x - 1}$ tai $y = -\sqrt{x - 1}$, missä $x \geqslant 1$.

Käyrän $y = \sqrt{x - 1}$ välillä $[1, 17]$ olevan osan pyörähtäessä x-akselin ympäri muodostuu kappale, jonka tilavuus on

$$V_2 = \pi \int_1^{17} (\sqrt{x - 1})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^{17} (x - 1)\mathrm{d}x$$

$= 128\pi$ (cm^3). Maljakon tilavuus on $V = V_2 - V_1 = 272\pi - 128\pi = 144\pi$ (cm^3) ja paino $144\pi \cdot 3{,}6$ g $\approx 1\,600$ g.)

564. 17,3 m^3 (Muuttujan arvon x kohdalla poikkileikkauskolmion korkeus on $\frac{6}{x}$ ja sivun pituus $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{x} = \frac{12}{\sqrt{3}x}$ (muistikolmio tai taulukkokirja). Poikkileikkauskolmion pinta-ala on $A(x) = \frac{36}{\sqrt{3}x^2}$ ja kappelin tilavuus

$$V = \int_1^6 A(x)\,\mathrm{d}x = \frac{36}{\sqrt{3}} \int_1^6 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{36}{\sqrt{3}} \Big/_1^6 \left(-\frac{1}{x}\right).)$$

565. $\frac{333\pi}{10} \approx 105$ (Yhtälöstä $y = x^3 + 1$ saadaan $x = \sqrt[3]{y-1}$. Alueen y-akselia vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat ympyröitä, joiden säde on $3 - \sqrt[3]{y-1}$. Kappaleen tilavuus

$$V = \pi \int_0^9 (3 - \sqrt[3]{y-1})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^9 (9 - 6(y-1)^{\frac{1}{3}} + (y-1)^{\frac{2}{3}}) dy$$

$$= \pi \Big/_0^9 (9y - 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot (y-1)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}(y-1)^{\frac{5}{3}})$$

$$= \pi \Big/_0^9 (9y - \frac{9}{2}(\sqrt[3]{y-1})^4 + \frac{3}{5}(\sqrt[3]{y-1})^5).)$$

566. 2,5 km^2, 2 875 000 mk
(Yhtälö $\sin 2x = \sin x$ toteutuu, kun $2x = x + n \cdot 2\pi$ tai $2x = \pi - x + n \cdot 2\pi$ eli kun $x = n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, n kokonaisluku.

Alueet rajautuvat väleillä $[0, \frac{\pi}{3}]$ ja $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

Ensimmäisellä välillä ylempänä on funktion $\sin 2x$ kuvaaja ja jälkimmäisellä funktion $\sin x$ kuvaaja (perusteluksi huolellinen kuvio tai väleiltä lasketut funktion arvot).

Pinta-alat ovat $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx$

$$= \Big/_0^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x) = \frac{1}{4} \quad \text{ja}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$$

$$= \Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x) = 2\frac{1}{4}.$$

Koko alueen pinta-ala on 2,5 km^2 = 250 ha.)

567. a) $\frac{243\pi}{5} \approx 153$ ($V = \pi \int_0^3 (x-3)^4 \, dx$

$$= \pi \Big/_0^3 \frac{1}{5}(x-3)^5)$$

b) $\frac{27\pi}{2} \approx 42{,}4$ (Integroidaan y:n suhteen.

Ratkaistaan x yhtälöstä $y = (x-3)^2$, jolloin saadaan ensin $x - 3 = \sqrt{y}$ tai $x - 3 = -\sqrt{y}$ ja edelleen $x = 3 + \sqrt{y}$ tai $x = 3 - \sqrt{y}$. Koska pyörähtävä käyrän osa on välillä $0 \leqslant x \leqslant 3$, kyseessä on käyrä $x = 3 - \sqrt{y}$, jonka välillä $0 \leqslant y \leqslant 9$ oleva osa pyörähtää y-akselin ympäri.

$$V = \pi \int_0^9 (3 - \sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^9 (9 - 6\sqrt{y} + y) dy.)$$

568. $\frac{45\pi}{4} \approx 35{,}3$ (Koska $y^2 = f(x)^2$, missä $f(x) = \sqrt{(2+x)(2-x)(1-x)}$, tulee olla $(2+x)(2-x)(1-x) \geqslant 0$.
Lausekkeen $(2+x)(2-x)(1-x)$ nollakohdat ovat -2, 1 ja 2.
Laskemalla yksi arvo kummaltakin väliltä $]-2, 1[$ ja $]1, 2[$ nähdään, että $(2+x)(2-x)(1-x) \geqslant 0$, kun $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

Tilavuus on $V = \pi \int_{-2}^{1} f(x)^2 \, dx$

$$= \pi \int_{-2}^{1} (2+x)(2-x)(1-x) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} (4 - 4x - x^2 + x^3) dx.)$$

569. Paraabelille pisteeseen $A = (0, a)$ piirretyn tangentin yhtälö on
$y - 0 = -a(x - a)$, joten $B = (0, a^2)$.

Kolmion OBA pinta-ala on $\frac{a^3}{2}$.

Paraabelin ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on $\int_0^a (ax - x^2)\mathrm{d}x = \frac{a^3}{6}$.

Osien pinta-alat ovat $\frac{a^3}{6}$ ja $\frac{a^3}{3}$, joten pinta-alojen suhde on aina $\frac{1}{2}$.

570. $A(x) = 1 - \cos x + \sin^2 x$, arvolla $\frac{2\pi}{3}$

(Alue muodostuu käyrän $y = \sin x$ ja x-akselin välillä $[0, x]$ rajaamasta alueesta, jonka pinta-ala on $\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$, ja suorakulmaisesta kolmiosta. Kolmion pystysuoran kateetin pituus on $\sin x$. Koska suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$, x-akselilla olevan kateetin pituus on $2 \sin x$. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot \sin x$ ja alueen pinta-ala $A(x) = 1 - \cos x + \sin^2 x$. Derivaattafunktion $A'(x) = \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x\,(1 + 2 \cos x)$ arvo on nolla, kun $\sin x = 0$ tai $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Välillä $]0, \pi[$ on derivaattafunktion nollakohta $x = \frac{2\pi}{3}$. Kulkukaavion avulla perustellaan, että funktio A saa välillä $]0, \pi[$ suurimman arvon kohdassa $\frac{2\pi}{3}$.)

571. suorat $y = -\ln(e - 1)$ ja $y = 1 - \ln(e - 1)$
(Olkoot suorien yhtälöt $y = a$ ja $y = a + 1$.

Pinta-ala on $A(a) = \int_a^{a+1} (e^x - x)\mathrm{d}x$.

Derivaattafunktio $A'(a)$ voidaan määrittää integroimatta, sillä funktion $A(a) = \int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ derivaattafunktio on $A'(a) = f(a + 1) - f(a)$ (kurssi Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi).
Voidaan myös integroida

$$A(a) = \int_a^{a+1} (e^x - x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_a^{a+1} (e^x - \tfrac{1}{2}x^2) = e^{a+1} - e^a - a - \tfrac{1}{2},$$ jolloin

$A'(a) = e^{a+1} - e^a - 1 = (e - 1)e^a - 1$.

Derivaatta on nolla, kun $e^a = \frac{1}{e - 1}$ eli kun

$a = \ln \frac{1}{e - 1} = -\ln(e - 1)$ $(\approx -0{,}54)$.

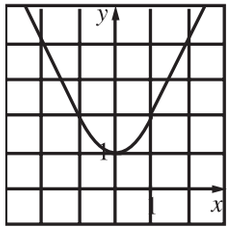
Pienin arvo perustellaan kulkukaavion avulla.)

572. paraabelin $y = \frac{1}{2r}(r^2 - x^2)$, missä $-r \leqslant x \leqslant r$,

suhde $\frac{4}{3\pi} \approx 0{,}42$

(Pisteen (x, y) etäisyys puoliympyrän halkaisijasta (x-akselista) on y ja kehästä $r - \sqrt{x^2 + y^2}$. Käyrän yhtälö on $y = r - \sqrt{x^2 + y^2}$ eli $\sqrt{x^2 + y^2} = r - y$.
Yhtälö voidaan korottaa neliöön, sillä $y \leqslant r$.
Sieventämällä saadaan yhtälö $y = \frac{1}{2r}(r^2 - x^2)$.
Käyrän ja halkaisijan väliin jäävä pinta-ala on $\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}r^2$, jonka suhde puoliympyrän pinta-alaan $\frac{1}{2}\pi r^2$ on $\frac{4}{3\pi}$.)

573. $f(x) = \begin{cases} -2x & , \text{kun } x \leqslant -1 \\ x^2 + 1, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ 2x & , \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$



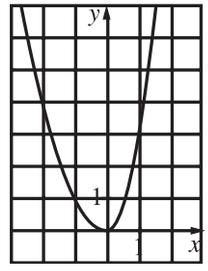
(Jos $x \leqslant -1$, niin $|x - t| = -x + t$ koko välillä $-1 \leqslant t \leqslant 1$, joten $f(x) = \int_{-1}^{1} (-x + t)\mathrm{d}t = -2x.$

Jos $-1 < x < 1$, niin $|x - t| = x - t$ välillä $-1 \leqslant t \leqslant x$ ja $|x - t| = -x + t$ välillä $x \leqslant t \leqslant 1$, joten $f(x) = \int_{-1}^{1} |x - t|\mathrm{d}t$

$$= \int_{-1}^{x} (x - t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{1} (-x + t)\mathrm{d}t = x^2 + 1.$$

Jos $x \geqslant 1$, niin $|x - t| = x - t$ koko välillä $-1 \leqslant t \leqslant 1$, joten $f(x) = \int_{-1}^{1} (x - t)\mathrm{d}t = 2x.$)

574. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 0 \\ 3x^2, & \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$



(Kun $t \leqslant x$, integroitava funktio on $t + (-t + x) = x$. Kun $t > x$, integroitava funktio on $t + (t - x) = 2t - x$.

Kun $x \geqslant 0$, $f(x) = \int_{0}^{x} x\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{2x} (2t - x)\mathrm{d}t$

$$= \int_{0}^{x} xt + \int_{x}^{2x} (t^2 - xt) = x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 3x^2.$$

Kun $x < 0$, $f(x) = \int_{0}^{x} (2t - x)\mathrm{d}t + \int_{x}^{2x} x\,\mathrm{d}t$

$$= \int_{0}^{x} (t^2 - xt) + \int_{x}^{2x} xt = x^2 - x^2 + 2x^2 - x^2$$

$= x^2$.)

575. $\frac{2}{3\pi} \approx 0{,}21$ (Merkitään lieriön pohjan sädettä r ja korkeutta h. Asetetaan x-akseli kulkemaan pitkin lieriön pohjaa keskipisteen kautta ja leikkaamaan kiilaa rajaava halkaisija kohtisuorasti. Sijoitetaan origo pohjan keskipisteeseen. Muuttujan arvon x kohdalle piirretty kohtisuora taso leikkaa kiilasta suorakulmion, jonka lieriön pohjalla oleva sivu on $2\sqrt{r^2 - x^2}$. Suorakulmion korkeus y saadaan sivukuvasta yhdenmuotoisilla kolmioilla:

$\frac{y}{x} = \frac{h}{r}$, joten $y = \frac{h}{r}x.$

Poikkileikkauskuvion pinta-ala on

$A(x) = 2\frac{h}{r}x\sqrt{r^2 - x^2}$ ja kiilan tilavuus

$2\frac{h}{r}\int_{0}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}r^2h.$)

Lukujonot ja summat

576. a) $a_n = \dfrac{2n}{10n+1}$ b) $a_n = (-1)^{n+1}n$

577. Luku $\dfrac{3}{2}$ ei ole, luku 2 on jonon 14. jäsen.

578. 34. jäsen 234, $a_n = 7n - 4$,
luku 689 on jonon 99. jäsen.

579. $d = 16$ ja $a_{20} = 307$
($3 + 7d = 115$ ja $a_{20} = 3 + 19d$)

580. 4 180 (Jonon 40. jäsen on $7 + 39 \cdot 5 = 202$.
Summa on $S_{40} = 40 \cdot \dfrac{7 + 202}{2}$.)

581. 1 683 (Luvut muodostavat aritmeettisen jonon. Ensimmäinen yhteenlaskettava on 3, viimeinen 99, ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 33.)

582. a) 36 290 (190 ensimmäisen parillisen positiivisen kokonaisluvun summa $190 \cdot \dfrac{2 + 380}{2}$)
b) $n(n+1)$ (n:n ensimmäisen parillisen kokonaisluvun summa $n \cdot \dfrac{2 + 2n}{2}$)

583. 10. jäsen 786 432, $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

584. $q = 3$ ja $a_{10} = 137\,781$ tai
$q = -3$ ja $a_{10} = -137\,781$
($7q^4 = 567$ ja $a_{10} = 7q^9$)

585. 8 193 (Jonossa on $q = -2$. Summa on
$S_{13} = \dfrac{3(1-(-2)^{13})}{1-(-2)}$.)

586. 21 523 360 (Summakaavaan sijoitetaan
$a = 4$, $q = 9$ ja $n = 8$.)

587. 47.43,6 (Geometrinen summa
$60 + 1{,}05 \cdot 60 + ... + 1{,}05^{24} \cdot 60$.
Kaavaan $\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan
$a = 60$, $q = 1{,}05$ ja $n = 25$.)

588. 1, 2, 5, 11, 26 ja 59

589. $a_n = 727 - 9n$, $a_{39} = 376$
(Aritmeettinen jono, jossa $d = -9$.)

590. 5 300 kirjaa (Kirjojen määrät muodostavat lukujonon, jossa $a_1 = 8\,200$ ja
$a_n = 0{,}92a_{n-1} + 250$, kun $n \geqslant 2$.
Lasketaan jonon 11. jäsen laskimen
[Ans] -näppäimen avulla.)

591. $x = 4$ (Tulee olla $\dfrac{2^{4x-2}}{2^{2x+1}} = \dfrac{2^{2x+1}}{2^x}$ eli
$2^{2x-3} = 2^{x+1}$ eli $2x - 3 = x + 1$.)

592. $x = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$,
n kokonaisluku
(Tulee olla $\sin^2 x - \sin x = \sin x - \cos^2 x$.
Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, saadaan yhtälö
$2 \sin x = 1$ eli $\sin x = \dfrac{1}{2}$.)

593. 55 vuotta (Merkitään nykyistä louhintamäärää a. n vuoden aikana louhitaan
$a + 1{,}02a + 1{,}02^2a + ... + 1{,}02^{n-1}a$
$= \dfrac{a(1-1{,}02^n)}{1-1{,}02} = 50a(1{,}02^n - 1)$.
Epäyhtälöstä $50a(1{,}02^n - 1) \leqslant 100a$,
joka tulee muotoon $1{,}02^n \leqslant 3$,
saadaan $n \leqslant 55{,}5$.)

594. vuoden 1998 alussa (Olkoon a_1, a_2, ... lukujono, joka ilmaisee puuston määrän vuoden alussa alkaen vuodesta 1988. Tällöin $a_1 = 100$ ja $a_n = 1{,}17a_{n-1} - 16$, kun $n \geq 2$. Koska tehtävässä ei vaadita jonon lausekkeen muodostamista, voidaan laskea (Ans -näppäin) ja kirjata jonon peräkkäisiä jäseniä, kunnes 120 ylittyy.
Toinen tapa on muodostaa jonolle lauseke kuten esimerkissä 6. Saadaan

$$a_n = 1{,}17^{n-1} \cdot 100 - \frac{16(1 - 1{,}17^{n-1})}{1 - 1{,}17}$$

$$= (100 - \frac{16}{0{,}17}) \cdot 1{,}17^{n-1} + \frac{16}{0{,}17}$$

$$= \frac{100}{17} \cdot 1{,}17^{n-1} + \frac{1600}{17}$$ (voidaan käyttää myös likiarvoja) ja ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 120$.)

595. 14. pallo (Peräkkäiset pallot ovat saman kuution ympäri ja sisään piirretyt pallot. Jos kuution särmän pituus on a, niin kuution sisään piirretyn pallon halkaisija on a ja kuution ympäri piirretyn pallon halkaisija on kuution avaruuslävistäjä $a\sqrt{3}$. Kuution sisään ja ympäri piirrettyjen pallojen tilavuuksien suhde on halkaisijoiden suhteen kuutio

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$. Pallojen tilavuudet muodostavat siis geometrisen jonon V_1, V_2, V_3, ... , jossa $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Epäyhtälö $q^{n-1} V_1 < 10^{-9} \cdot V_1$ toteutuu, kun $n > \frac{\lg 10^{-9}}{\lg q} + 1 \approx 13{,}6$.)

596. a) 10 203,38 euroa
$(1{,}025 \cdot 1000 + 1{,}025^2 \cdot 1000 + \ldots + 1{,}025^9 \cdot 1000)$
b) vuoden 2021 lopussa (Pääoma n. säästövuoden lopussa on

$$1{,}025 \cdot 1000 + 1{,}025^2 \cdot 1000 + \ldots + 1{,}025^n \cdot 1000 = \frac{1{,}025 \cdot 1000(1 - 1{,}025^n)}{1 - 1{,}025}$$

$$= 41\,000(1{,}025^n - 1).$$

Epäyhtälö $41\,000(1{,}025^n - 1) \geq 20\,000$ toteutuu, kun $n \geq 16{,}1$.)

597. Aito kasvaminen: Funktion $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$, missä $x > -2$, derivaattafunktio

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$ on positiivinen kaikilla x, joten funktio f on aidosti kasvava. Siten $f(1) < f(2) < \ldots$ eli $a_1 < a_2 < \ldots$.
Toinen tapa on muodostaa erotus $a_{n+1} - a_n$, joka sievenee muotoon $\frac{1}{(n+3)(n+2)}$ ja on siis aina positiivinen. Koska $a_{n+1} - a_n > 0$, niin $a_n < a_{n+1}$ kaikilla n.

Pienempiä kuin 2: Erotus

$$2 - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$ on positiivinen, joten

$$\frac{2n+3}{n+2} < 2$$ kaikilla n.
Voidaan myös arvioida:

$$\frac{2n+3}{n+2} < \frac{2n+4}{n+2} = 2.$$

598. 53 viikon (Juoksumatkat muodostavat aritmeettisen jonon, jonka n. jäsen on $6 + 0{,}5(n-1) = 0{,}5n + 5{,}5$ ja n:n ensimmäisen jäsenen summa

$$n \cdot \frac{6 + (0{,}5n + 5{,}5)}{2} = 0{,}25n^2 + 5{,}75n.$$

Toisen asteen epäyhtälö $0{,}25n^2 + 5{,}75n \geq 1\,000$ toteutuu, kun $n \leq -75{,}8$ tai $n \geq 52{,}8$.)

599. Olkoon k pienin luvuista ja $2n$ lukujen määrä. Lukujen summan viimeinen yhteenlaskettava on $k + 2n - 1$, joten summa on

$$S = 2n \cdot \frac{k + (k + 2n - 1)}{2} = n(2k + 2n - 1).$$

Keskiarvo on $\bar{x} = \frac{S}{2n} = k + n - \frac{1}{2}$.
Koska k ja n ovat luonnollisia lukuja, $k + n - \frac{1}{2}$ ei ole luonnollinen luku.

600. $a = \frac{32}{3}$ ja $q = \frac{1}{2}$ tai $a = 32$ ja $q = -\frac{1}{2}$

(Koska $S_6 = S_2 + q^2S_2 + q^4S_2$, niin $21 = 16 + 16q^2 + 16q^4$ eli $16q^4 + 16q^2 - 5 = 0$. Sijoittamalla $q^2 = t$ ja ratkaisemalla ensin t saadaan $q^2 = -\frac{5}{4}$ tai $q^2 = \frac{1}{4}$.

Siis $q = \frac{1}{2}$ tai $q = -\frac{1}{2}$.

a:n arvot saadaan sijoittamalla q:n arvo kahden ensimmäisen jäsenen summaan $a + aq = 16$.)

601. kuudes jäsen $\frac{1296}{64} = 20\frac{1}{4}$ (Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{x^4}{2^x}$, joka on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla. Derivaattafunktiolla

$$f'(x) = \frac{4x^3 2^x - x^4 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{x^3 2^x (4 - x \ln 2)}{2^{2x}}$$

on nollakohta $x = \frac{4}{\ln 2} \approx 5{,}8$.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{4}{\ln 2}]$ ja aidosti vähenevä välillä $[\frac{4}{\ln 2}, \infty[$.

Siis jonon suurin jäsen on joko $f(5) = \frac{5^4}{2^5}$ tai $f(6) = \frac{6^4}{2^6}$.

Koska $\frac{5^4}{2^5} \approx 19{,}5$ ja $\frac{6^4}{2^6} = 20{,}25$,

suurin jäsen on $\frac{6^4}{2^6}$.

Toinen tapa on tutkia jonon $a_n = \frac{n^4}{2^n}$ peräkkäisten jäsenten suhdetta

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4}{2n^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4$. Epäyhtälö $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ toteutuu, kun $n > \frac{1}{\sqrt[4]{2} - 1} \approx 5{,}3$.

Seuraa, että $a_1 < ... < a_5 < a_6$ ja $a_6 > a_7 > a_8 > ...$.)

602. sadas jäsen 1 190 (Jonon n ensimmäisen jäsenen summa on $S_n = 6n^2 - 4n$. Tällöin $a_{100} = S_{100} - S_{99} = 59\,600 - 58\,410 = 1\,190$. Yleisesti on $a_n = S_n - S_{n-1} = 12n - 10$, kun $n \geqslant 2$. Lisäksi $a_1 = S_1 = 2$. Siis $a_n = 12n - 10$ kaikilla $n \geqslant 1$. Jono on aritmeettinen jono, jossa peräkkäisten jäsenten erotus on 12.)

603. $x_n = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, jäsenet lähenevät lukua 2

(Jonon rekursiokaava on muotoa $x_n = qx_{n-1} + b$, ja jonolle voidaan päätellä analyyttinen muoto esimerkin 6 menetelmällä.

Kun n suurenee, niin potenssien $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ arvot lähenevät nollaa.)

604. arvosta 8 lähtien (Jono on geometrinen jono $1000,\ 1000 \cdot \frac{1}{2},\ 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, ...$, jossa $a_n = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Käytetään potenssikaavoja ja aritmeettisen summan kaavaa:

$$a_n a_{n+1} \cdot ... \cdot a_{n+9}$$
$$= 1000^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1) + n + ... + (n+8)}$$
$$= 10^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10n + 35}.$$

Ratkaistaan epäyhtälö $10^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10n + 35} < 0{,}001$.)

605. $S_n = \ln(n + 1)$, vähintään 22 026 jäsentä

($S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + ... + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n+1}{n}$
$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + ... + \ln n - \ln(n-1)$
$+ \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.
Epäyhtälö $\ln(n + 1) > 10$ toteutuu, kun $n > e^{10} - 1$.)

606. Summakaavalla saadaan

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

Ensimmäinen epäyhtälö pätee, koska

$$\frac{3^n - 1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

Toinen epäyhtälö pätee, koska

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n} < \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

607. Funktio $f(x) = \frac{x!}{x^x}$ on määritelty vain, kun x on positiivinen kokonaisluku, joten vähenemistä ei voida tutkia derivaatan avulla. Koska lukujonon jäsenet ovat positiivisia, voidaan tutkia peräkkäisten jäsenten suhdetta ja osoittaa, että $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ kaikilla n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1} n!}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1^n = 1, \text{ koska } \frac{n}{n+1} < 1.$$

Voidaan myös tutkia peräkkäisten jäsenten erotusta: $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} - \frac{n!}{n^n}$

$$= \frac{n^n (n+1)! - (n+1)^{n+1} n!}{(n+1)^{n+1} n^n}$$

$$= \frac{n^n (n+1)! - (n+1)^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} n^n}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n^n - (n+1)^n)}{(n+1)^{n+1} n^n}.$$

Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin $n^n < (n+1)^n$, joten $n^n - (n+1)^n < 0$. Siis $a_{n+1} - a_n < 0$.

608. $a_{164} = \frac{164^{1000}}{164^{164}} \approx 4{,}1 \cdot 10^{1\,851}$ (Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{x^{1000}}{x^x} = \frac{x^{1000}}{(e^{\ln x})^x} = \frac{x^{1000}}{e^{x \ln x}}$, joka on määritelty, kun $x > 0$. Derivaattafunktion

$$f'(x) = \frac{1000 x^{999} e^{x \ln x} - x^{1000} e^{x \ln x} (\ln x + 1)}{(e^{x \ln x})^2}$$

$$= \frac{x^{999} e^{x \ln x} (1000 - x(\ln x + 1))}{e^{2x \ln x}}$$

nollakohdat ja merkin määrää funktio $g(x) = 1000 - x(\ln x + 1) = 1000 - x \ln x - x$. Derivaattafunktiolla $g'(x) = -\ln x - 1 - 1 = -\ln x - 2$ on nollakohta $e^{-2} \approx 0{,}14$ ja $g'(x) < 0$, kun $x > e^{-2}$. Siis g on aidosti vähenevä välillä $[e^{-2}, \infty[$, joten sillä on tällä välillä korkeintaan yksi nollakohta. Koska $g(163) \approx 6{,}7 > 0$ ja $g(164) \approx -0{,}38 < 0$, funktiolla g on välillä $[e^{-2}, \infty[$ tasan yksi nollakohta x_0, joka on välillä $]163, 164[$. Koska g on aidosti vähenevä, sen merkki vaihtuu kohdassa x_0 positiivisesta negatiiviseksi. Siis funktio f on aidosti kasvava välillä $[e^{-2}, x_0]$ ja aidosti vähenevä välillä $[x_0, \infty[$. Suurin jonon luvuista on joko

$$f(163) = \frac{163^{1000}}{163^{163}} \text{ tai } f(164) = \frac{164^{1000}}{164^{164}}.$$

Laskemalla lukujen 10-kantaiset logaritmit (logaritmikaavat) nähdään, että luku $\frac{164^{1000}}{164^{164}}$ on suurempi. Erityisesti on

$$\lg \frac{164^{1000}}{164^{164}} \approx 1\,851{,}6095, \text{ joten}$$

$$\frac{164^{1000}}{164^{164}} \approx 10^{1\,851{,}6095} = 10^{0{,}6095} \cdot 10^{1\,851}$$

$$\approx 4{,}1 \cdot 10^{1\,851}.)$$

Todennäköisyyslaskenta

609. a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

(Alkeistapauksia $(1, 1)$, $(1, 2)$, … on 24, ja luetteloinnin sijasta ne voidaan merkitä koordinaatistoon.)

610. 0,75 (Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 < x < 1$. Todennäköisyys on välin $[-2, 1[$ pituuden suhde välin $[-2, 2]$ pituuteen.)

611. 0,23 (Origosta janan päätepisteisiin piirrettyjen janojen välinen kulma on noin $82{,}87°$.

$\mathrm{P(osuu\ janaan)} = \frac{82{,}87°}{360°}$.)

612. a) 0,80 ($\frac{167}{208}$)

b) 0,49 ($\frac{161}{328}$, missä $161 = 328 - 167$.)

613. a) Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat -5, 5 ja 45 (euroa),

$\mathrm{P}(X = -5) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$

$\mathrm{P}(X = 5) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ ja

$\mathrm{P}(X = 45) = \frac{1}{20} = 0{,}05.$

b) $-0{,}50$ euroa

($\mathrm{E}(X) = \frac{15}{20} \cdot (-5) + \frac{4}{20} \cdot 5 + \frac{1}{20} \cdot 45.$)

614. a) 2,5 ($\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4$)

b) 7,5 ($\frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2$)

615. 262 144 eri tavalla (4^9)

616. a) 0,61 (Valitaan alkeistapauksiksi kolmen viikonpäivän jonot ilman takaisinpanoa. Kaikkien alkeistapauksien lukumäärä on $7 \cdot 7 \cdot 7$ ja suotuisten alkeistapausten lukumäärä $7 \cdot 6 \cdot 5$.)
b) 0,39 (a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma)

617. a) 0,011 (Valitaan alkeistapauksiksi neljän kortin jonot ilman takaisinpanoa. Tällöin

$\mathrm{P(kaikki\ samaa\ maata)} = \frac{52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$.)

b) 0,11

($\mathrm{P(kaikki\ eri\ maata)} = \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$)

c) 0,89 (b-kohdan tapahtuman vastatapahtuma)

618. 0,22 (Jos alkeistapauksina ovat 39 lottonumeron joukon 7 numeron osajoukot, niin

$\mathrm{P(ei\ yhtään\ oikein)} = \frac{\binom{32}{7}}{\binom{39}{7}}$.)

619. a) 0,051 (Jos alkeistapauksiksi valitaan viiden arvan jonot, niin

$\mathrm{P(ei\ yhtään\ voittoa)} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}$.

Jos alkeistapauksiksi valitaan viiden arvan osajoukot, niin $\mathrm{P(ei\ yhtään\ voittoa)} = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}}$.)

b) 0,949 (a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma)

c) 0,397 (Alkeistapauksiksi valitaan viiden arvan osajoukot, jolloin

$\mathrm{P(kaksi\ voittoa)} = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{3}}{\binom{20}{5}}$.)

620. a) 0,56 ($0{,}7 \cdot 0{,}8$)
b) 0,38 ($0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8$)
c) 0,94 ($1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2$)

621. a) $\frac{1}{36} \approx 0{,}028$

b) 0,25 (P(ainakin yksi kuutospari)

$= 1 - \mathrm{P(ei\ yhtään\ kuutosparia)} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10}$)

622. 0,032 (P(samaa sukupuolta) = P(kaikki poikia) + P(kaikki tyttöjä) $= 0{,}512^6 + 0{,}488^6$)

623. 0,22 ($0{,}75 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}40 + 0{,}25 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}25 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}60$)

624. 0,66 ($0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7$)

625. 0,35 ($\binom{5}{2} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3$)

626. 0,60 ($1 - \binom{15}{14} 0{,}87^{14} \cdot 0{,}13^1 - 0{,}87^{15}$)

627. 0,27 ($\binom{8}{4} 0{,}512^4 \cdot 0{,}488^4$)

628. a) 68 % (Jos satunnaismuuttuja X on auton nopeus, niin

$P(X \leqslant 90) = P(Z \leqslant \frac{90 - 87{,}2}{6{,}0}) = \Phi(0{,}47)$.)

b) 12 %

($P(X \leqslant 80) = P(Z \leqslant \frac{80 - 87{,}2}{6{,}0}) = \Phi(-1{,}20)$.

Jos käytetään taulukkoa, niin hyödynnetään symmetriaa: $\Phi(-1{,}20) = 1 - \Phi(1{,}20)$.)

c) vähintään 95 km/h (Määritetään sellainen nopeus x, että $P(X \leqslant x) = 0{,}90$ eli

$\Phi(\frac{x - 87{,}2}{6{,}0}) = 0{,}90$.

Jos $\Phi(z) = 0{,}90$, niin $z \approx 1{,}28$. Saadaan $x = 87{,}2 + 1{,}28 \cdot 6{,}0 \approx 94{,}88$.)

629. 0,99 (Olkoon X virheellisten yksilöiden lukumäärä 20 kappaleen näytteessä. Kyseessä on toistokoe, joten

$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0{,}98^{20} + \binom{20}{1} 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{19}$

$+ \binom{20}{2} 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{18}$.)

630. a) $3{,}7 \cdot 10^{-6}$ (Jos alkeistapauksia ovat neljän kortin jonot, niin P(kaikki ässiä)

$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$. Jos alkeistapauksia ovat neljän kortin osajoukot, niin P(kaikki ässiä)

$= \frac{\binom{4}{4}}{\binom{52}{4}}$. Ehdollisilla todennäköisyyksillä laskien: P(kaikki ässiä) $= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49}$.)

b) 0,72 (a-kohdan vaihtoehtoja vastaten

$\frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$ tai $\frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}}$ tai

$\frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49}$.)

631. 0,29 (P(samanväriset) = P(molemmat punaisia) + P(molemmat sinisiä) + P(molemmat mustia).
Alkeistapauksina kahden pallon osajoukot:

$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}$.

Alkeistapauksina kahden pallon jonot:

$\frac{3 \cdot 2}{12 \cdot 11} + \frac{4 \cdot 3}{12 \cdot 11} + \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11}$.

Ehdollisilla todennäköisyyksillä:

$\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11}$.)

632. Todennäköisyys on 0,081. Ryhmässä tulee olla vähintään 842 jäsentä.
(P(ainakin yksi 31:stä syntynyt helmikuun 29. päivänä) = 1 − P(ei kukaan) $= 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^{31}$.

Jos ryhmässä on n jäsentä, niin

P(ainakin yksi) $= 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^n$. Tulee olla

$\left(\frac{365}{366}\right)^n < 0{,}10$ eli $n > \frac{\lg 0{,}10}{\lg \frac{365}{366}} \approx 841{,}6$.)

633. 0,65 (Olkoon X naisten lukumäärä ryhmässä. Todennäköisyys on
$P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$
$= \binom{10}{4} 0{,}52^4 \cdot 0{,}48^6 + \binom{10}{5} 0{,}52^5 \cdot 0{,}48^5$
$+ \binom{10}{6} 0{,}52^6 \cdot 0{,}48^4$.)

634. $P(\underline{x} = 0) = \frac{1}{126} \approx 0{,}0079,$

$P(\underline{x} = 1) = \frac{10}{63} \approx 0{,}16,$

$P(\underline{x} = 2) = \frac{10}{21} \approx 0{,}48,$

$P(\underline{x} = 3) = \frac{20}{63} \approx 0{,}32,$

$P(\underline{x} = 4) = \frac{5}{126} \approx 0{,}040;$

odotusarvo 2,22 miestä
(Satunnaismuuttujaa merkitään joskus alleviivatulla pienellä kirjaimella. Alkeistapauksiksi valitaan neljän henkilön joukot. Tällöin

$$P(\underline{x} = 0) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}, \quad P(\underline{x} = 1) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}},$$

$$P(\underline{x} = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}, \quad P(\underline{x} = 3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}} \text{ ja}$$

$$P(\underline{x} = 4) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}}.)$$

635. 1,33 euroa (Satunnaismuuttujan X = ”nettovoitto” jakauma:

$$P(X = -20) = \frac{\binom{11}{2}}{\binom{15}{2}},$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{11}{1}\binom{3}{1}}{\binom{15}{2}},$$

$$P(X = 20) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}},$$

$$P(X = 80) = \frac{\binom{11}{1}\binom{1}{1}}{\binom{15}{2}} \text{ ja}$$

$$P(X = 100) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{15}{2}}.)$$

636. a) 83 % (Arvio voidaan laskea todennäköisyyksien avulla. P(kaikki pallot ovat virheettömiä) $= 0{,}97^6 \approx 0{,}83$.)
b) 3,1 % (Olkoon p todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pallo on viallinen. Tällöin P(4 pallon pakkauksessa ainakin yksi viallinen) = 1 – P(ei yhtään viallista) $= 1 - (1 - p)^4$. Koska $1 - (1 - p)^4 = 0{,}12$, niin $(1 - p)^4 = 0{,}88$ ja $1 - p = \sqrt[4]{0{,}88}$.)

637. alle 200 g 25 %:lla ja välillä 200 g – 210 g 59 %:lla pakkauksista
(Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun keksipakkauksen massa (g). Tällöin

$$P(X \leqslant 200) = P\left(Z \leqslant \frac{200 - 204}{6}\right)$$
$= P(Z \leqslant -0{,}67) = \Phi(-0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67)$
$\approx 0{,}2514$ ja $P(200 \leqslant X \leqslant 210)$

$$= P\left(\frac{200 - 204}{6} \leqslant Z \leqslant \frac{210 - 204}{6}\right)$$
$= P(-0{,}67 \leqslant Z \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}67)$
$\approx 0{,}8413 - 0{,}2514 = 0{,}5899$.)

638. 425 g (Olkoon pussin keskisisältö μ. Massaa 400 vastaava normitettu arvo on $\frac{400-\mu}{15}$.

Tulee olla $\Phi(\frac{400-\mu}{15}) = 0{,}05$, joten

$\frac{400-\mu}{15} \approx -1{,}65$.)

639. 0,47 (Olkoon x leikkauskohdan etäisyys sauvan toisesta päätepisteestä. Hypotenuusan pituus on vähintään 0,8 m, kun
$x^2 + (1-x)^2 \geqslant 0{,}8^2$ eli kun
$2x^2 - 2x + 0{,}36 \geqslant 0$.
Toisen asteen epäyhtälö toteutuu, kun
$0 < x \leqslant 0{,}235$ tai $0{,}765 \leqslant x < 1$.
Todennäköisyys on näiden välien pituuksien summan suhde sauvan pituuteen.)

640. $\frac{7}{16} \approx 0{,}44$ (Olkoot x ja y saapumisajat minuutteina kello 9.00:n jälkeen. Saapumishetkien valinta vastaa pisteen valintaa neliöstä $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$. A ja B ovat kahvilassa samalla hetkellä, jos saapumishetkien etäisyys on korkeintaan 15 minuuttia eli
$|y - x| \leqslant 15$ eli $-15 \leqslant y - x \leqslant 15$ eli
$y \geqslant x - 15$ ja $y \leqslant x + 15$. Suotuisa alue on suorien $y = x - 15$ ja $y = x + 15$ väliin jäävä neliön osa ja todennäköisyys alueen pinta-alan suhde neliön pinta-alaan 3 600. Alueen pinta-ala saadaan, kun neliön pinta-alasta vähennetään kahden kolmion pinta-ala, yhteensä
$45 \cdot 45 = 2\,025$.)

641. a) 0,011
$(((1 - 0{,}0012)(1 - 0{,}0015)(1 - 0{,}0018))^{1000})$
b) 0,55 (P(ainakin yksi säilyy ehjänä 1 000 käynnistyksessä) = 1 − P(kaikki särkyvät)
= 1 − P(1. komponentti särkyy) · P(2. komponentti särkyy) · P(3. komponentti särkyy)
$= 1 - (1 - 0{,}9988^{1000}) \cdot (1 - 0{,}9985^{1000}) \cdot (1 - 0{,}9982^{1000})$.)

642. 0,999 (P(enintään yksi virheellinen) = P(yksikään merkki ei vääristy) + P(1 merkki vääristyy) = P(yksikään 0 ei vääristy) · P(yksikään 1 ei vääristy) + P(yksi 0 vääristyy) · P(yksikään 1 ei vääristy) + P(yksikään 0 ei vääristy) · P(yksi 1 vääristyy)

$= 0{,}995^3 \cdot 0{,}99^4 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}005^1 \cdot 0{,}995^2 \cdot 0{,}99^4$

$+ 0{,}995^3 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^3$.)

643. Kannattaa ostaa yksi suuri kivi.
(Pidetään kultasepän varallisuutena ennen kivien hankintaa 12 000 mk. Olkoon satunnaismuuttuja X varallisuus suuren jalokiven oston ja hionnan jälkeen ja satunnaismuuttuja Y varallisuus pienempien kivien oston ja hionnan jälkeen. Jos suuri kivi säilyy ehjänä, varallisuus on $1{,}3 \cdot 12\,000 - 1\,000 = 14\,600$ (mk). Jos suuri kivi särkyy, varallisuus on $-1\,000$. Saadaan $\mathrm{E}(X) = 13\,040$ (mk). Satunnaismuuttujan Y mahdolliset arvot ovat 14 000, 6 200 ja $-1\,600$ ja vastaavat todennäköisyydet $0{,}92^2$, $0{,}92 \cdot 0{,}08 + 0{,}08 \cdot 0{,}92$ ja $0{,}08^2$. Saadaan $\mathrm{E}(Y) = 12\,752$ (mk).
Koska $\mathrm{E}(X) > \mathrm{E}(Y)$, kannattaa ostaa yksi suuri kivi.)

644. 0,40 (Lasketaan ensin vastatapahtuman ”ennen klo 9.00” todennäköisyys.
Vaihtoehdot, että henkilö saapuu työpaikalleen ennen kello 9.00, ovat:
saapuu pysäköintipaikalle ennen 8.55 ja löytää pysäköintipaikan ja saapuu ennen 8.45 ja ei löydä pysäköintipaikkaa.
Jos satunnaismuuttuja X on saapumisaika pysäköintipaikalle minuutteina 8.00 jälkeen, niin

$\mathrm{P}(X \leqslant 55) = \mathrm{P}(Z \leqslant \frac{55-50}{5}) = \Phi(1) \approx 0{,}8413$

ja $\mathrm{P}(X \leqslant 45) = \mathrm{P}(Z \leqslant \frac{45-50}{5}) = \Phi(-1)$

$= 1 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$.
Siis P(ennen kello 9.00)
$= 0{,}8413 \cdot 0{,}65 + 0{,}1587 \cdot 0{,}35 \approx 0{,}60$.)

645. $\frac{13}{12} \approx 1{,}08$ (Lukujen p ja q arpominen vastaa pisteen (p, q) arpomista pq-koordinaatiston neliöstä $-1 \leqslant p \leqslant 1$, $-1 \leqslant q \leqslant 1$. Yhtälöllä on kaksi juurta, kun $D = p^2 - 4q > 0$, yksi juuri, kun $D = 0$, ja ei yhtään juurta, kun $D < 0$.

Epäyhtälö $p^2 - 4q > 0$ eli $q < \frac{1}{4}p^2$

toteutuu paraabelin $q = \frac{1}{4}p^2$ alapuolella olevassa neliön osassa, jonka pinta-ala on

$2 + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}p^2 \,\mathrm{d}p = \frac{13}{6}$, joten

$\mathrm{P}(2 \text{ juurta}) = \frac{13}{6} : 4 = \frac{13}{24}$.

Yhtälö $p^2 - 4q = 0$ toteutuu käyrällä $q = \frac{1}{4}p^2$, jonka pinta-ala on 0, joten $\mathrm{P}(1 \text{ juuri}) = 0$.

Tällöin $\mathrm{P}(0 \text{ juurta})$ on $1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$.

Jos satunnaismuuttuja X on juurten lukumäärä, niin

$\mathrm{E}(X) = \frac{13}{24} \cdot 2 + 0 \cdot 1 + \frac{11}{24} \cdot 0$.)

646. a) 330 ($\binom{11}{7}$)

b) 148 862,00 euroa (Järjestelmässä on

6 + lisänumero oikein -rivejä: $\binom{7}{6} \cdot 2 = 14$,

6 oikein -rivejä: $\binom{7}{6} \cdot 2 = 14$,

5 oikein -rivejä: $\binom{7}{5} \cdot \binom{4}{2} = 126$,

4 oikein -rivejä: $\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{3} = 140$.)

647. a) 2 % ($\mathrm{P}(X \leqslant 20) = \mathrm{P}(X - 16 \leqslant 4)$

$= \mathrm{P}(\lg(X - 16) \leqslant \lg 4) = \mathrm{P}\left(Z \leqslant \frac{\lg 4 - 0{,}875}{0{,}130}\right)$

$= \Phi(-2{,}10) = 1 - \Phi(2{,}10)$, missä muuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa.)

b) 23,5 vuotta (On määritettävä sellainen ikä a, että $\mathrm{P}(X \leqslant a) = 0{,}5$ eli

$\mathrm{P}(\lg(X - 16) \leqslant \lg(a - 16)) = 0{,}5$.

Koska normaalijakauma on symmetrinen, sen mediaani on sama kuin odotusarvo.

Siis $\lg(a - 16) = 0{,}875$, josta saadaan

$a - 16 = 10^{0{,}875}$.)

648. a) 0,85

(P(ainakin yksi hertta tai ainakin yksi ässä)

= 1 – P(ei yhtään herttaa ja ei yhtään ässää)

$= 1 - \frac{\binom{36}{5}}{\binom{52}{5}}$.

Todennäköisyys voidaan laskea myös käyttäen alkeistapauksina jonoja tai ehdollisten todennäköisyyksien avulla.)

b) 0,26 (Vastatapauksen todennäköisyys on

P(ei yhtään herttaa tai ei yhtään ässää)

= P(ei yhtään herttaa) + P(ei yhtään ässää) – P(ei yhtään herttaa ja ei yhtään ässää).)

649. a) $p_1 = 0{,}8$ ja $p_n = 0{,}6p_{n-1} + 0{,}2$, kun $n \geqslant 2$, $p_5 \approx 0{,}54$ (Tapaus ”Anna voittaa n. pelin”, missä $n \geqslant 2$, voidaan purkaa toisensa poissulkeviin tapauksiin ”Anna voittaa edellisen pelin ja Anna voittaa n. pelin” ja ”Maija voittaa edellisen pelin ja Anna voittaa n. pelin”. Siis $p_n = 0{,}8p_{n-1} + 0{,}2(1 - p_{n-1}) = 0{,}6p_{n-1} + 0{,}2$, kun $n \geqslant 2$.)

b) $p_n = 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}3 + 0{,}5$, lähestyy lukua 0,5 (Kirjoittamalla jonon ensimmäisiä jäseniä huomataan säännönmukaisuus:

$p_n = 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}8 + 0{,}6^{n-2} \cdot 0{,}2 + \ldots + 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}8 + \frac{0{,}2(1 - 0{,}6^{n-1})}{1 - 0{,}6}$

$= 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}3 + 0{,}5$.)

Hakemisto

aidosti kasvava funktio 202

aidosti kasvava lukujono 240

aidosti vähenevä funktio 202

aidosti vähenevä lukujono 240

alkeistapaus 253

aritmeettinen jono 242

aritmeettinen summa 243

binomijakauma 269

binomikerroin 262

binomitodennäköisyys 269

derivaatta 197

derivaattafunktio 198

derivoiminen 198

derivoituvuus 197

diskriminantti 52

ehdollinen todennäköisyys 265

eksponentiaalinen muutos 76

eksponenttifunktio
- määritelmä ja ominaisuuksia 76
- derivoiminen 85

eksponenttiyhtälö ja -epäyhtälö
- ratkaiseminen eksponentteja vertaamalla 77
- ratkaiseminen logaritmin avulla 83

ensimmäisen asteen epäyhtälö 48

ensimmäisen asteen yhtälö 48

epäjatkuvuuskohta 194

erotusosamäärä 197

etäisyys
- lukusuoralla 15
- *xy*-koordinaatistossa 140

geometrinen jono 244

geometrinen summa 245

integraalifunktio 219

integroiminen 220

irrationaaliluvut 9

itseisarvo
- määritelmä 14
- ominaisuuksia 15

jakauma
- diskreetin satunnaismuuttujan jakauma 256
- jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma 270

jaoton polynomi 52

jatkuvuus 194

juuri $\sqrt[n]{a}$ 32

juurifunktio
määrittelyjoukko ja kuvaaja 32
derivoiminen 43

kahden muuttujan epäyhtälö 150

kaksoisjuuri 52

kehäkulmalause 105

kertoma 261

kertymäfunktio 272

keskihajonta 257

keskijanalause 114

keskinormaalilause 115

kokonaisluvut 9

kolmion kulmien summa 105

kolmion merkilliset pisteet 115

kolmion pinta-ala 118

kolmion sisään piirretty ympyrä 108

kolmion ympäri piirretty ympyrä 112

korkeamman asteen epäyhtälö 58

korkeamman asteen yhtälö 55

kosini
terävän kulman kosini 89
suunnatun kulman kosini 89
arvojoukko 91
symmetriakaavat 94
yhtälö $\cos \alpha = a$ 94

kosinifunktio $\cos x$
kuvaaja, jakso ja arvojoukko 97
yhtälö $\cos x = a$ 99
derivoiminen 102

kosinilause 122

kulma
kahden janan välinen kulma 127
suoran ja tason välinen kulma 129
kahden tason välinen kulma 130

kulmakerroin 146

kulmanpuolittajalause 114

kuution avaruuslävistäjä 127

käyrän yhtälö 140

käänteisfunktio 206

käänteisluku 11

kääntäen verrannollisuus 40

lineaarinen yhtälöryhmä 151

logaritmifunktio
määritelmä ja ominaisuuksia 78
derivoiminen 86

logaritmikaavat 81

logaritmin määritelmä 78

logaritmiyhtälöt 82

lukujono 239

lukusuora 9

luonnollinen logaritmi 79

luonnolliset luvut 9

maksimikohta ja maksimiarvo 203

minimikohta ja minimiarvo 203

monikulmion kulmien summa 105

monotoninen funktio 202

muistikaavat 46

muistikolmiot 112

murtolauseke 66

murtolukujen laskutoimitukset 13

murtopotenssi 34

määrätty integraali 225

neliöiksi täydentäminen 143

neliöjuuri
määritelmä 37
ominaisuuksia 38

neliöjuuriyhtälö 60

nollavektori 168

normaali 158

normaalijakauma 271

normitettu arvo 271

normitettu normaalijakauma 271

odotusarvo 256

paikkavektori 178

paraabeli 163

paraabelin akseli 163

paraabelin huippu 163

pisteen etäisyys suorasta 161

pistetodennäköisyys 271

pistetulo
määritelmä 189
geometrinen tulkinta 190

poissulkevat tapahtumat 267

polynomien laskusäännöt 46

polynomifunktioiden derivoiminen 62

potenssi
eksponentti kokonaisluku 29
eksponentti rationaaliluku 34

potenssifunktio
kuvaaja ja arvojoukko 31
derivoiminen 43

potenssikaavat 30

potenssiyhtälö
eksponentti positiivinen kokonaisluku 32
yleinen potenssiyhtälö 36

prosentti
määritelmä 20
perusarvon ratkaiseminen 21
vertailu- ja muutosprosentti 22

prosenttiyksikkö 25

Pythagoraan lause 110

Pythagoraan lauseen käänteislause 110

radiaani 96

rationaaliepäyhtälö 71

rationaalifunktio
määritelmä ja määrittelyjoukko 66
raja-arvon määrittäminen 67
derivoiminen 73

rationaalilausekkeilla laskeminen 68

rationaaliluvut 9

rationaaliyhtälö 69

reaaliluvut 9

rekursiivinen lukujono 248

rekursiokaava 248

riippumattomat tapahtumat 266

ristikulmalause 104

samankohtaisten kulmien lause 104

satunnaismuuttuja
diskreetti satunnaismuuttuja 256
jatkuva satunnaismuuttuja 270

sini
terävän kulman sini 89
suunnatun kulman sini 89
arvojoukko 91
symmetriakaavat 94
yhtälö $\sin \alpha = a$ 94

sinifunktio $\sin x$
kuvaaja, jakso ja arvojoukko 97
yhtälö $\sin x = a$ 99
derivoiminen 102

sinilause 120

suljettu väli 209

suoraan verrannollisuus 40

suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä 127

suoran ja ympyrän leikkauspisteet 154

suoran suuntakulma 147

suoran suuntavektori 182

suoran yhtälö
ratkaistu muoto 147
yhtälö $Ax + By + C = 0$ 148
suoran parametrimuotoinen vektoriyhtälö 182
suoran parametrimuotoinen koordinaattiyhtälö 183

suorien kohtisuoruusehto 158

suorien välinen kulma 148

suotuinen alkeistapaus 253

takaisinpano 260

tangentti
terävän kulman tangentti 89
suunnatun kulman tangentti 90
arvojoukko 91
yhtälö $\tan \alpha = a$ 95

tangenttifunktio $\tan x$
kuvaaja, jakso ja arvojoukko 98
yhtälö $\tan x = a$ 100
derivoiminen 102

tapahtuma 253

tasasivuisen kolmion keskipiste 115

tason parametrimuotoinen vektoriyhtälö 186

tiheysfunktio 270

todennäköisyys
klassinen todennäköisyys 253
geometrinen todennäköisyys 254
tilastollinen todennäköisyys 255
ehdollinen todennäköisyys 265

toisen asteen epäyhtälö 53

toisen asteen polynomifunktion tekijät . . . 52

toisen asteen yhtälö 50

toistokoe 268

trigonometristen funktioiden
Pythagoraan lause 91

tuloperiaate 258

varianssi. 257

vastaluku 11

vastatapahtuma 264

vastavektori 168

vektori 168

vektorien erotus 169

vektorien summa 169

vektorien välinen kulma
määritelmä 168
laskeminen pistetulon avulla 190

vektorin kertominen luvulla
määritelmä 170
yhteys yhdensuuntaisuuteen. 171

vektorin komponentit
tason vektori 172
avaruuden vektori 173
yhdensuuntaisuus ja komponentit 174

vektorin pituus
xy-tason vektorin pituus 178
xyz-avaruuden vektorin pituus. 180

verrannollisuuskerroin 40

vieruskulmalause 104

yhdenmuotoiset kuviot
määritelmä. 106
pinta-alojen suhde 109

yhdenmuotoisten kappaleiden
tilavuuksien suhde 133

yhdenmuotoisuuslause kk. 108

yhdenmuotoisuussuhde. 106

yhtenevyys 109

yksikkövektori 170

ympyrän yhtälö 141

ääriarvo 203

ääriarvokohta 203